



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Hölder linealización del teorema Grobman-Hartman

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

José Humberto BRAVO VIDARTE

ASESOR

Dra. Roxana LÓPEZ CRUZ

Lima, Perú

2020



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Bravo, J. (2020). *Hölder linealización del teorema Grobman-Hartman*. Tesis para optar el título profesional de Licenciado en Matemática. Escuela Profesional de Matemática, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

HOJA DE METADATOS COMPLEMENTARIOS

Código Orcid del autor: <http://orcid.org/0000-0002-7682-8790>

Código Orcid de la asesora: <https://orcid.org/0000-0002-7703-5784>

DNI del autor: 41706392

Grupo de investigación: Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais

Institución que financia parcial o totalmente la investigación: Universidade Federal de Itajubá

Ubicación geográfica donde se desarrolló la investigación. Debe incluir localidades y coordenadas geográficas:

- Ciudad Universitaria - Pabellón de Ciencias Matemáticas
Teléfono IP Nº 619-7000 Anexo 1610 – Telefax 619-7000 Anexo 1609, 1618
Av. Venezuela s/n, Lima - Perú
Coordenadas geográficas:
 - Longitud:-76.7425500
 - Latitud: -7.0787100
- Av. BPS, 1303, Bairro Pinheirinho, Itajubá-MG Telefone: (35) 3629-1101 Fax: (35) 3622-3596 Caixa Postal 50 CEP: 37500 903 Coordenadas geográficas:
 - Longitud:-22.4255600
 - Latitud: -45.4527800

Año o rango de años que la investigación abarcó: Un año.

Inicio: Febrero 2019

Fin: Enero 2020



UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

(Universidad del Perú, DECANA DE AMÉRICA)

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

Ciudad Universitaria - Av. Venezuela S/N cuadra 34

Teléfono: 619-7000, Anexo 1610

Correo Postal: 05-0021, E-mail: eapmat@unmsm.edu.pe

Lima - Perú

Escuela Profesional de Matemática

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las 17:05 horas del Lunes 27 de enero de 2020, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Evaluador de Tesis: Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya (PRESIDENTE), Dr. Jorge Luis Crisóstomo Parejas (MIEMBRO), Dra. Roxana López Cruz (MIEMBRO ASESOR), para la sustentación de la tesis titulada: «HÖLDER LINEALIZACIÓN DEL TEOREMA GROBMAN-HARTMAN», presentado por el señor Bachiller JOSÉ HUMBERTO BRAVO VIDARTE, para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición del tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, el tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:

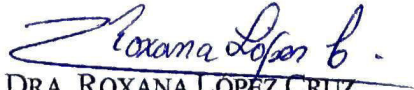
Diecinueve (Sobresaliente con mención) (19).

A continuación, el Presidente del Jurado, Dr. Jorge Alberto Coripaco Huarcaya, manifestó que el señor Bachiller JOSÉ HUMBERTO BRAVO VIDARTE, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 18:10 horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.


DR. JORGE ALBERTO CORIPACO HUARCAYA
PRESIDENTE


Dr. JORGE LUIS CRISÓSTOMO PAREJAS
MIEMBRO


DRA. ROXANA LÓPEZ CRUZ
MIEMBRO ASESOR

*Dedicado este trabajo a mi Madre María, mi Esposa Nancy, a Mi hijo Thiago,
y a mi hijo in memoriam.*

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, me gustaría agradecer a la vida y a la fuente que ella nos permite, por darme las oportunidades en este caminar que sirven y sirvieron para mi crecimiento personal, tanto académico como espiritual.

En esta oportunidad me gustaría agradecer a mi Mamá María por todo el gran amor en todos estos años juntos en esta vida terrenal.

También agradecer a mi Esposa Nancy, por todas las correcciones hechas a este trabajo, por todos estos años de compañerismo, amistad, amor y un especial agradecimiento por uno de los más grandes regalos que nos dio la vida, nuestro hijo Thiago Josué, también me gustaria agradecer “in memoriam” a nuestra(o) hija(o) que estuvo en camino, por estos meses de ilusión y de fuerza que me dio al momento de escribir este trabajo.

Agradecer también a mi familia en Lima por la fuerza, el amor y la comprensión, a pesar de la distancia siempre en espíritu (Mi tío Urias Vidarte, Mi tía Elvira Oré de Vidarte, Mi prima Fiorella Vidarte, mi sobrina Mabel Castro Vidarte, Yamile Castro Vidarte y mi primo Eulogio Castro,). Agradecer a mis tías, primos, primas, sobrinos, “in memoriam” a mi abuelita Mabila, de San Juan de Cojín por los grandes momentos que pase y siempre paso cuando estoy con ellos.

Un especial agradecimiento a la Profesora Roxana López por la disponibilidad que me brindo, para la realización de esta tesis.

También me gustaría agradecer a todos mis amigos y amigas que siempre me acompañaron en este caminar.

Por último, me gustaría agradecer a la Universidade Federal de Itajubá en especial al IMC, por todas las condiciones laborales que me proporciona, y que sirvieron para poder escribir esta tesis.

RESUMEN

HÖLDER LINEALIZACIÓN DEL TEOREMA GROBMAN-HARTMAN

JOSÉ HUMBERTO BRAVO VIDARTE

ENERO 2020

Asesora: ***ROXANA LÓPEZ CRUZ***

Título Obtenido: ***Licenciado en Matemática Pura***

El teorema de Grobman-Hartman, nos dice que el comportamiento cualitativo de un sistema dinámico en una vecindad alrededor de un punto fijo hiperbólico cualitativamente tiene el mismo comportamiento de su linealización cerca de un punto equilibrio, y más generalmente de una sucesión de pequeñas perturbaciones de transformaciones lineales Lipschitziana hiperbólicas. Sabemos que, no siempre para esos tipos de aplicaciones existen conjugaciones diferenciables, al menos que estén sobre una superficie o no exista resonancia. Sin embargo, para poder distinguir por ejemplo diferentes tipos de nodos nos gustaría saber si la conjugación puede tener mayor regularidad.

Nuestro principal objetivo es justamente presentar una prueba de la regularidad C'^α , de las conjugaciones. Es decir, mostramos que la conjugación en el teorema de Grobman-Hartman es siempre Hölder continua (y tiene su inversa Hölder continua).

ABSTRACT

HÖLDER LINEARIZATION OF THE GROBMAN-HARTMAN THEOREM

JOSÉ HUMBERTO BRAVO VIDARTE

ENERO 2020

Advisor:: ***ROXANA LÓPEZ CRUZ***

Obtained title: ***Graduate in Mathematics***

The Grobman-Hartman Theorem, tell us that the qualitative behavior of a dynamical system in a neighborhood around a hyperbolic fixed point is qualitatively the same as the behavior of its linearization around of the equilibrium point, and more generally of small perturbation of hyperbolic Lipschitziana linear transformations. We know, unless we are on surface or there exist no resonance, it is well-know that the conjugacy transforming the dynamics into a linear one, in a neighborhood of the hyperbolic, need not be differentiable. However, we need to distinguish for example different types of nodes we would like to know if the conjugation can have greater regularity.

Our main objective in this work is to present a proof of the regularity C^α of the conjugations. That is, we show that the conjugation in the Grobman-Hartman theorem is always Hölder continues (and has its inverse Hölder continues).

Índice general

1. Introducción	3
2. Preliminares	9
2.1. Revisión de Espacios Métricos	9
2.2. Revisión de Cálculo Diferencial en Espacios de Banach	14
2.3. Operadores Lineales Acotados	20
2.3.1. Normas Adaptadas	24
2.3.2. Isomorfismos Hiperbólicos	25
2.4. Nociones de Sistemas Dinámicos	27
2.4.1. Breve Introducción de Conjugación	31
3. Teorema de Grobman-Hartman Para Sistemas Dinámicos Discretos	35
3.1. Prueba del Teorema de Grobman-Hartman Para Difeomorfismo .	36
3.2. Contra-Ejemplos Para El Caso Discreto	47
4. Teorema de Linealización C^α-Hölder Grobman-Hartman	55
4.1. Enunciado del Teorema	55
4.2. Lema Principal-Belitski-Rayskin [BR11]	56
4.3. Prueba del Teorema Principal 4.1	61
4.4. Ejemplos	73
5. Teorema de Linealización C^α-Hölder Grobman-Hartman para Ecua-	

ciones Diferenciales	77
5.1. Teorema de Grobman-Hartman para Campos	82
5.2. Contra-Ejemplo Para El Caso Continuo	85
5.3. Aplicaciones para Campos Vectoriales	86
5.3.1. Sistemas Bidimensionales	87
5.3.2. Ecuaciones de Lorenz	91
Bibliografía	95

Introducción

Para este capítulo usaremos de manera próxima los excelentes libros [ASY97], [Jac89]. El comportamiento caótico de la mayoría de los Sistemas dinámicos no-lineales es observado en experimentos y simulaciones computacionales en los más diversos campos de la ciencia. Muchos datos experimentales irregulares, que anteriormente fueron atribuidos a errores o ruidos, son, ahora reevaluados para una explicación en términos de nuevos conceptos (Teoría de sistemas dinámicos) ([ASY97]). La mayoría parte de los procesos naturales (viento, atmósfera, mar y sol) y no-naturales, o sea, (los realizados por la humanidad,) son sistemas considerados complejos, muy difíciles de ser predichos detalladamente debido al propio comportamiento. La dinámica de tales procesos pueden ser analizadas a través de modelos dinámicos los cuales, intentan expresar los principales aspectos del fenómeno físico a ser estudiado en términos simbólicos, para luego intentar tomar una decisión en base a esos modelos. Los modelos dinámicos más comunes son:

- Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO);
- Ecuaciones Diferenciales Parciales (EDP);
- Sistemas Dinámicos Discretos (SDD).

Como ejemplo de sistemas dinámicos tenemos.

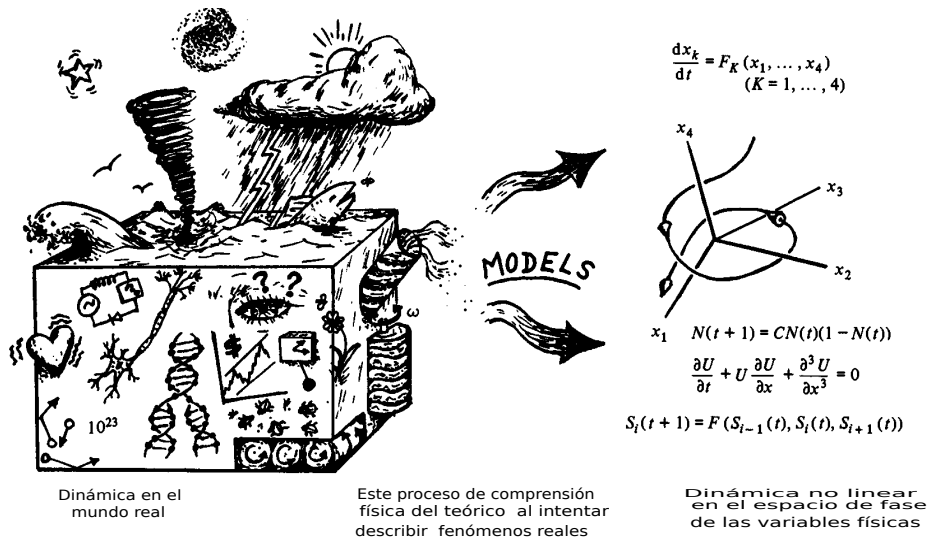


Figura 1.1: Modelos en la naturaleza. [Jac89]

- **Ecuaciones de “Lorenz”.** Estas ecuaciones fueron introducidas por Edward Lorenz [Lor63] con el objetivo de poder predecir el clima. Aunque los resultados no fueron como lo esperado, sin embargo, aportó bastante información a la matemática que ahora es conocida como “caos”. Lorenz percibió que para ciertos valores de los parámetros, el sistema nunca tiene un comportamiento previsible a largo plazo, presentando sensibilidad a las condiciones iniciales (efecto mariposa), y por eso, no es posible que previsiones a largo plazo sean hechas a partir de datos obtenidos a través de medidas con sensores reales. Las ecuaciones de Lorenz son

$$\begin{cases} x' = \sigma(y - x) \\ y' = \rho x - y - xz \\ z' = xy - \beta z, \end{cases} \quad (1.1)$$

σ, ρ y β constantes. Estas ecuaciones fueron obtenidas de una simplificación del desarrollo en series de potencia de la ecuación de Navier-Stokes para la previsión del tiempo. Este sistema presenta algún significado físico para $\rho \approx 1$, sin embargo, Lorenz encontró comportamientos dinámicos

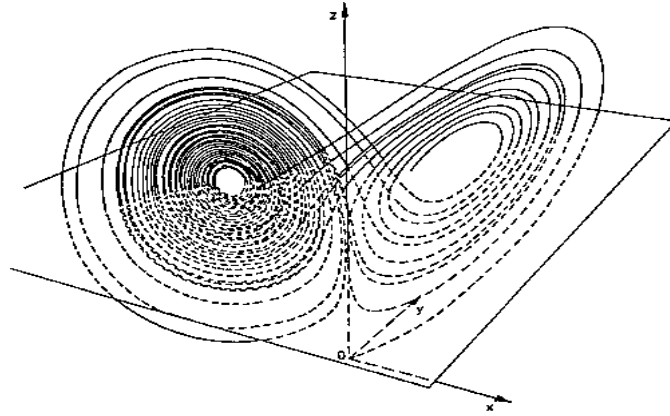


Figura 1.2: Interpretación geométrica numérica de la ecuación de Lorenz. [GH83]

incomunes para $\sigma = 10$, $\rho = 28$ y $\beta = \frac{8}{3}$. Esto es, encontró un atractor caótico, conocido como “La Mariposa de Lorenz”.

- **Transformación de “Ikeda” [Ike79, IDA80].** En física y matemáticas, la transformación de Ikeda es un sistema dinámico de tiempo discreto dado por

$$f(x, y) = ((A + B(x \cos \omega) - y \sin \omega), B(x \sin \omega + y \cos \omega)),$$

$$\text{donde } \omega = K - \frac{E}{1 + x^2 + y^2}.$$

Este sistema intenta describir la dinámica de una cavidad óptica en forma de anillo que contiene un medio no lineal y es excitada por una fuente externa de radiación coherente intensa, un láser. Esta ley dinámica, es utilizada en óptica no lineal. Para los parámetros $A = 1, 0, B = 0, 9, K = 0, 9, K = 0, 4$ y $E = 6, 0$, este sistema es caótico.

Los ejemplos anteriores nos muestran que, tanto las ecuaciones diferenciales y las transformaciones que gobiernan el movimiento de los sistemas dinámicos frecuentemente son bastante complicadas para describir su comportamiento di-

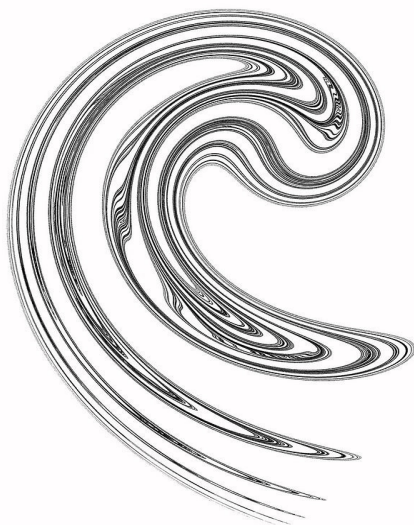


Figura 1.3: Atractor “Ikeda”. Fuente: <https://is.gd/9F9JbM>

námico, principalmente cuando los sistemas son no lineales. El estudio de los sistemas no lineales, en general, es más complicado que los sistemas lineales. En ciertas circunstancias, es posible usar métodos de la teoría lineal en el estudio de los sistemas no lineales examinando el comportamiento local de movimientos conocidos, un proceso para hacer dicho estudio es conocido como linealización.

Por esto la **Teoría de Linealización** constituye una herramienta fundamental en sistemas dinámicos hiperbólicos que surge en el estudio de campo de vectores y difeomorfismos en un punto fijo hiperbólico. Tal método fue investigado por muchos autores ([Har60a, Har60b, Har63], [Gro59], [Gro62], [Sel85], [Ste57], [Ste58], [Ste59], [Sel85], [Bel78], [Bel73], [BR11]). Esta teoría comienza con un campo vectorial o un difeomorfismo no-lineal definida próximo de una singularidad, y busca condiciones suficientes para la existencia de un buen sistema de coordenadas con la propiedad que el sistema dinámico sea lineal, escrito en términos de un nuevo sistema de coordenadas. Dada la teoría de linealización es natural la cuestión de la regularidad del nuevo sistema de coordenadas. Desafortunadamente, sabemos que si pretendemos encontrar linealización con cambio de coordenadas suaves vamos encontrar dificultades

dependiendo de la relación entre los autovalores del sistema linearizado (condiciones de no resonancia). Sin embargo, para poder distinguir los; por ejemplo diferentes tipos de nodos nos gustaría saber si la conjugación puede tener una mayor regularidad. En este trabajo, siguiendo el artículo no publicado [BR11], pretendemos mostrar que sobre las mismas condiciones del Teorema de Grobman-Hartman [Har60b], [Gro59] existe una conjugación de clase C^α , para algun $0 < \alpha < 1$. Para tal fin, en nuestro trabajo pretendemos hacer el siguiente desarrollo:

Capítulo I: En este capítulo, presentaremos algunas definiciones básicas y resultados importantes que serán usados como herramientas para motivar nuestro trabajo.

Capítulo II: En este capítulo, enunciamos y probamos el Teorema de Grobman-Hartman Para Sistemas Dinámicos Discretos, también daremos algunos ejemplos que nos servirán como motivación para presentar el Teorema Principal.

Capítulo III: En este capítulo, enunciamos y probamos el resultado principal de la tesis, que sería mostrar la existencia de una conjugación de clase C^α para puntos fijos hiperbólicos. Con este resultado tendríamos que la conjugaciones del Teorema de Grobman-Hartman son Hölderianas. Luego, daremos un ejemplo de aplicación para un tipo de transformación de Henón.

Capítulo IV: En este capítulo, enunciamos y probamos el Teorema Grobman-Hartman para Ecuaciones Diferenciales en \mathbb{R}^n , (Campos Vectoriales en \mathbb{R}^n), para luego dar algunos ejemplos de aplicación, que nos ayuda a visualizar geoméricamente la utilidad de este Teorema, en el final de este capítulo daremos una utilización de este teorema para un tipo de ecuaciones de Lorenz (“La Mariposa de Lorenz”).

Preliminares

En este capítulo incluiremos las definiciones, las notaciones y los resultados básicos que utilizaremos a lo largo de este trabajo y de los cuales algunos nos serán de utilidad en los siguientes capítulos. En primer lugar haremos un repaso de algunos resultados del cálculo diferencial en espacios de Banach, después operadores lineales, normas adaptadas, isomorfismos hiperbólicos y por último daremos nociones de sistemas dinámicos. Los resultados que veremos aquí pueden consultarse en los libros de Castro[Cas09], Chicone[Chi99], Barreira-Valls [BV07], [BV12a], Dieudonne [Die69] y Elon lages [Lim04].

2.1 Revisión de Espacios Métricos

En esta sección haremos un repaso de algunas definiciones y resultados de espacios métricos.

Definición 2.1. (*Métrica y espacio métrico*). Considere un conjunto $X \neq \emptyset$. Decimos que el par (X, d) es un espacio métrico si $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}$ es una función, llamada distancia o métrica, tal que, para $x_1, x_2, x_3 \in X$ se tiene que:

$$d1) \quad d(x_1, x_2) \geq 0.$$

$$d2) \quad d(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

$$d3) \quad d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1),$$

$$d4) \quad d(x_1, x_3) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) \text{ (esta propiedad es llamada de desigualdad triangular).}$$

A partir de la definición se puede probar que:

- i) $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$, para $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$.
- ii) $|d(x_1, x_3) - d(x_2, x_3)| \leq d(x_1, x_2)$, para $x_1, x_2, x_3 \in X$.
- iii) Sea (X, d) un espacio métrico. Considere $\tilde{X} \subset X$. Si definimos la función $\tilde{d}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$, para $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \tilde{X}$. Se puede verificar que (\tilde{X}, \tilde{d}) es también un espacio métrico y \tilde{d} es llamada de métrica inducida por d a \tilde{X} .

Definición 2.2. Consideremos un espacio métrico (X, d) . Sea $x \in X$, y $r > 0$. Definimos la bola abierta de centro x y radio r como el conjunto $B(x; r) := \{y \in X; d(x, y) < r\}$. También definimos la bola cerrada $\overline{B}(x; r) := \{y \in X; d(x, y) \leq r\}$ y la esfera $S(x, r) := \{y \in X; d(x, y) = r\}$.

Definimos el diámetro del conjunto A como $\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

Definición 2.3. Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $V \subset X$ se dice que es abierto si para cada $x \in V$ existe una bola abierta $B(x; r)$ contenida en V . Es decir si para cada $x \in V$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset V$.

Observación 2.1. Si \mathcal{A} es la colección de todos los conjuntos abiertos del espacio métrico (X, d) , tenemos las siguientes propiedades:

1. $X, \emptyset \in \mathcal{A}$.
2. $A_\alpha, \alpha \in I \Rightarrow \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{A}$.
3. $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.

Las tres propiedades hacen de \mathcal{A} una topología, y del par (X, d) un ejemplo de espacio topológico.

Definición 2.4. (Norma). Decimos que un par $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio normado si E es un espacio vectorial y la función $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, llamada norma, satisface para e y f :

- (i) $\|e\| \geq 0$.
- (ii) $\|e\| = 0 \Leftrightarrow e = 0$.
- (iii) $\|\lambda e\| = |\lambda| \|e\|$.
- (iv) $\|e + f\| \leq \|e\| + \|f\|$ (desigualdad triangular).

Cuando no se tiene la condición (ii), la función $\|\cdot\|$ se dice que es una semi-norma.

Observación 2.2.

- 1) Se tiene que todo espacio normado es un espacio métrico, pues, dado $(X, \|\cdot\|)$, definimos $d(x, y) = \|x - y\|$.
- 2) Mas el recíproco del item anterior no vale, es decir, no todo espacio métrico es normado. Para ver esto podemos considerar el siguiente espacio vectorial $X = \{(a_1, \dots, a_n), \dots : a_n \in \mathbb{C}\}$ sobre el cuerpo \mathbb{C} . Sobre este espacio definimos la función

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|},$$

lo cual se puede verificar que (X, d) es espacio métrico. También podemos probar que $\lambda \in \mathbb{C}$, $d(\lambda x, \lambda y) \neq |\lambda|d(x, y)$, esto quiere decir, que si definiéramos la “norma” a partir de esta distancia, se tendría que $\|\lambda x - \lambda y\| \neq |\lambda|\|x - y\|$, esto nos dice que $(X, \|\cdot\|)$ no es un espacio normado.

Definición 2.5 (Sucesión y sub-sucesión). Sea X un conjunto cualquier. Una sucesión en X es una aplicación $x : \mathbb{N} \rightarrow X$. Denotaremos por $x_j := x(j)$ y $x := (x_j)$. Sea la sucesión $x : \mathbb{N} \rightarrow X$, decimos que (x_{j_k}) es sub-sucesión de (x_j) si $x_{j_k} \in \mathbb{N}$ y $\hat{\mathbb{N}} = \{j_1 < j_2 < \dots\}$.

Definición 2.6 (Sucesión convergente). Una sucesión (x_j) en un espacio métrico $(X; d)$ es llamada convergente en $x \in X$ si para cualquier bola abierta B con $x \in B$, tenemos un número finito de índices j tales que $x_j \notin B$. En otras palabras, dado una bola abierta $B \subset X$ con $x \in B$, existe n_B tal que $x_j \in B$; $n > n_B$. Escribimos $x_j \rightarrow x$ cuando $j \rightarrow +\infty$, o simplemente $x_j \rightarrow x$ para denotar que la sucesión (x_j) converge a $x \in X$.

Decimos que una sub-sucesión (x_{j_k}) es convergente si la sucesión $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ definida por $y_k := x_{j_k}$, para $k \in \mathbb{N}$ converge.

Definición 2.7 (Sucesión de Cauchy). Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión (x_n) , $x_n \in X$; $n \in \mathbb{N}$ es llamada sucesión de Cauchy si dado un número real $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $m, j \in \mathbb{N}$, con $m \geq n_0$ y $j \geq n_0$ tenemos $d(x_m, x_j) < \epsilon$.

Intuitivamente, decir que (y_n) es una sucesión de Cauchy significa decir que sus términos están más y más cercanos para los índices n suficientemente grandes.

Definición 2.8 (Aplicación continua). Sean $(X; d)$ y $(\hat{X}; \hat{d})$ espacios métricos. Una aplicación $f : X \rightarrow \hat{X}$ es llamada continua en un punto $x \in X$, si dado $\epsilon > 0$, existe $\alpha > 0$ tal que para $y \in X$, si $d(x, y) < \alpha$ implica $\hat{d}(f(x), f(y)) < \epsilon$.

La aplicación $f : X \rightarrow \hat{X}$ es llamada continua si es continua en cada punto $x \in X$.

Es inmediato de la definición anterior que una aplicación $f : X \rightarrow \hat{X}$ es continua, si, y solamente si, la pre-imagen de cualquier abierto de \hat{X} es siempre un subconjunto abierto de X .

Observación 2.3. Aún en contextos métricos, es posible probar que una aplicación $f : X \rightarrow \widehat{X}$ es continua en $x \in X$ si y solamente si f es sucesionalmente continua en $x \in X$.

Recordando que, la función f sucesionalmente continua en $x \in X$ si dada una sucesión (x_n) , $x_n \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$, $n \rightarrow \infty$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n)) = f(x)$.

Definición 2.9 (Espacio métrico completo, Fréchet, 1906). Un espacio métrico (X, d) es dicho completo si toda sucesión de Cauchy (x_n) , $x_n \in X$, es convergente para un punto $x \in X$.

Definición 2.10 (Espacio de Banach). Decimos que un espacio vectorial normado es un espacio de Banach si la métrica inducida de la norma es completa.

Ejemplo 2.1. Sea $X = \mathbb{R}^k$, y $\|\cdot\| : \mathbb{R}^k \rightarrow [0; \infty)$ una norma cualquiera. Entonces, el espacio X con la métrica dada por $d(v, w) := \|v - w\|$, $v, w \in \mathbb{R}^k$ es un espacio métrico completo, y por tanto, un espacio de Banach. Tal hecho se sigue de que toda sucesión acotada en \mathbb{R}^k posee una sub-sucesión convergente (Teorema de Bolzano-Weierstrass).

Definición 2.11. Sea X un conjunto y (Y, d) un espacio métrico. Considere

$$\mathcal{F}(X, Y) := \{f : X \mapsto Y; \quad f \text{ es acotada}\}.$$

Si definimos la función $d_\infty : \mathcal{F}(X, Y) \times \mathcal{F}(X, Y) \rightarrow [0; \infty)$, como

$$d_\infty(f, g) = \sup\{d(f(x); g(x)); x \in X\}$$

. Se tiene que d_∞ es una métrica de $\mathcal{F}(X, Y)$, llamada distancia de la convergencia uniforme.

Sabemos que si \widetilde{X} es un espacio métrico completo, entonces $\mathcal{F}(X, \widetilde{X})$ también un espacio métrico completo.

Ejemplo 2.2. Sea X un conjunto cualquier, y sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Defina el conjunto $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X, E) := \{f : X \mapsto E; \quad f \text{ es acotada}\}$. Entonces, tenemos que la aplicación $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{F} \rightarrow [0; \infty)$ definida como $\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| : x \in X\}$ es una norma de \mathcal{F} , llamada de norma de la convergencia uniforme, o norma del “sup”. Se prueba que \mathcal{F} es un espacio de Banach.

Definición 2.12 (Aplicación Lipschitziana). Sean (X, d) y $(\widehat{X}, \widehat{d})$ dos espacios métricos. Una función $F : X \rightarrow \widehat{X}$ es llamada Lipschitziana o simplemente Lipschitz, si existe $C \geq 0$, de modo que $\widehat{d}(F(x_1); F(x_2)) \leq Cd(x_1, x_2)$, para todo $x_1, x_2 \in X$. Llamamos K de constante de Lipschitz de la función F . El ínfimo de las constantes de Lipschitz de F será denotado por $Lip(F)$, el cual es una constante de Lipschitz.

Observación 2.4.

1. Notemos que las aplicaciones Lipschitzianas son continuas. En efecto, Si F es Lipschitziana, suponiendo sin pérdida de generalidad que $C > 0$, sea $x \in X$, $\epsilon > 0$, y tomando $\delta = \frac{\epsilon}{C}$, se tiene $d(F(x); F(y)) < \epsilon$, siempre que $d(x, y) < \delta$.
2. Denotemos $K(M)$ el subconjunto de las aplicaciones continuas $\varphi \in \mathcal{F}(E, E)$ satisfaciendo

$$\|\varphi(x') - \varphi(x'')\| \leq M\|x' - x''\|^\alpha.$$

Entonces se tiene que $K(M)$ es un conjunto cerrado. De hecho, sea $\varphi_n \in K(M)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi$, desde que

$$\|\varphi_n(x') - \varphi_n(x'')\| \leq M\|x' - x''\|^\alpha.$$

Entonces, tomando límites en ambos lados, obtenemos

$$\|\varphi(x') - \varphi(x'')\| \leq M\|x' - x''\|^\alpha.$$

Así, $\varphi \in K(M)$, lo que prueba que $\overline{K(M)} = K(M)$, lo que concluye la observación.

Observación 2.5. Si X, Y y Z son espacios métricos, con $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ ambas Lipschitzianas, entonces la compuesta $h = g \circ f : X \rightarrow Z$ también es Lipschitz con

$$\text{Lip}(g \circ f) \leq \text{Lip}(g) \cdot \text{Lip}(f).$$

Una subclase importante de aplicaciones Lipschitz es constituida por las contracciones de un espacio métrico, que definimos a seguir.

Definición 2.13 (Contracción). Considere (X, d) un espacio métrico. Decimos que una función $F : X \rightarrow X$ es una contracción si existe $0 \leq K < 1$ tal que $d(F(x); F(y)) \leq Kd(x; y)$ $x, y \in X$.

Teorema 2.1 (Punto fijo de Banach-Cacciopoli). Considere un espacio métrico completo (X, d) y sea $T : X \rightarrow X$ una contracción. Entonces, existe un único punto fijo $x_0 \in X$, esto es, $x_0 = T(x_0)$. Además de eso, si $x_1 \in X$, entonces $T^n(x_1) \rightarrow x_0$, cuando $n \rightarrow \infty$.

Demostración:

Sea $y \in X$ y considere la sucesión $x_n = T^n(y) = T(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq \theta d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq \theta^n d(T(y), y).$$

Luego,

$$d(x_{n+m}, x_n) \leq \sum_{j=n}^{n+m-1} d(x_{j+1}, x_j) \leq \sum_{j=n}^{n+m} \theta^j d(T(y), y) \leq \frac{\theta^n}{1-\theta} d(T(y), y).$$

Por tanto x_n es una sucesión de Cauchy en X y converge para un cierto x_0 , pues M es completo.

Debido a la continuidad de T , y pasando al límite en la relación $x_n = T(x_{n-1})$ obtenemos $x_0 = T(x_0)$.

Ahora probaremos la unicidad del punto fijo. Si $z \in M$ es tal que $z = T(z)$, entonces $d(x_0, z) = d(T(x_0), T(z)) \leq \theta d(x_0, z)$, luego $x_0 = z$, desde $0 < \theta < 1$.

Desde que y fue arbitrario y x_0 es el único punto fijo, las cuentas hechas anteriormente nos muestran que $T^n(x_1) \rightarrow x_0$, para $x_1 \in X$. ■

Del teorema anterior se tiene inmediatamente el siguiente corolario.

Corolario 2.1. Considere un espacio métrico completo (X, d) y $T : X \rightarrow X$ una función continua tal que T^k sea una contracción para algún $k \in \mathbb{N}$. Entonces existe un único punto fijo $x_0 \in X$ de T y para cualquier $x_1 \in X$, tenemos $T^n(x_0) \rightarrow x_0$.

2.2 Revisión de Cálculo Diferencial en Espacios de Banach

En esta sección haremos un repaso de algunas definiciones y resultados de cálculo diferencial en espacios de Banach.

Sean E, F espacios de Banach sobre el mismo cuerpo K onde $K = \mathbb{R}$ o \mathbb{C} . Indicamos con U un subconjunto abierto de E y $\|\cdot\|$ denota la norma en ambos espacios.

Definición 2.14. La función $f : U \rightarrow F$ es llamada (Fréchet) diferenciable en $a \in U$ si existe una función lineal continua $T : E \rightarrow F$, tal que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - T(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

La función T es llamada “derivada de f en a ,” y será denotada por $Df(a)$ o $f'(a)$.

Observación 2.6. Algunos autores incluyen la continuidad de la función f en a , en la definición, de diferenciabilidad en a , suponiendo apenas que $Df(a)$ sea lineal, y luego concluyen que $Df(a)$ es continua. Es otro punto de vista equivalente.

Definición 2.15. La función $f : U \subset E \rightarrow F$ es diferenciable en U si f es diferenciable en

todos los puntos de U . Neste caso, la aplicación

$$\begin{aligned} Df &: U \rightarrow F \\ x &\rightarrow Df(x) \end{aligned}$$

es llamada la derivada de f en U y representada por Df .

Proposición 2.1. Sea $f : U \rightarrow E$ una función diferenciable en $a \in U$, $v \in E$, el conjunto $V := V_{a,v} = \{t \in K \mid a + tv \in U\}$. Entonces, V es un conjunto abierto en K , $0 \in V$ y la función:

$$\begin{aligned} g_{a,v} &: V \longrightarrow K \\ t &\rightarrow g_{a,v}(t) := f(a + tv) \end{aligned}$$

es diferenciable en 0 y satisface

$$\frac{d}{dt} f(a + tv)|_{t=0} = f'(a)v.$$

Demostración: Para $v = 0$ se ve facilmente que $V_{a,0}$ es abierto y $Df(a)0 = 0$. Ahora, supongamos que $v \neq 0$ y definamos la función

$$\alpha : V \rightarrow K$$

dada por

$$\begin{aligned} \alpha(t) &:= \left\| \frac{1}{t}(f(a + tv) - f(a)) - Df(a)v \right\| \\ &= \frac{1}{|t|} \|f(a + tv) - f(a) - f'(a)tv\|. \end{aligned}$$

Para $t \neq 0$ es suficiente probar que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha(t) = 0.$$

Sea $\epsilon > 0$, y definamos $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{\|v\|} > 0$. Desde que, f es diferenciable en a existe δ_1 tal que

$$\frac{\|f(a + tv) - f(a) - f'(a)h\|}{\|h\|} < \epsilon_1,$$

donde $0 < \|h\| < \delta_1$.

Si definimos $\delta = \frac{\delta_1}{\|v\|}$. Si $|t| < \delta_1$, entonces $\|tv\| < \delta$ y

$$\frac{\|f(a + tv) - f(a) - Df(a)tv\|}{|t|\|v\|} < \epsilon_1.$$

De ahí, obtenemos que $\alpha(t) \leq \epsilon$ siempre que $|t| < \delta$. Lo que termina la prueba. ■

Corolário 2.2. Si $f : U \subset E \rightarrow F$ es diferenciable en U , entonces la derivada de f en U

$$\begin{aligned} f' = Df & : U \rightarrow F \\ x & \rightarrow Df(x) \end{aligned}$$

es una función.

Observación 2.7. Sean X, Y, X_i, Y_i espacios de Banach, entonces tenemos las siguientes propiedades:

1. Si $f : X \rightarrow Y$ es diferenciable en $a \in X$, entonces f es continua en a .
2. Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ diferenciables, entonces $h = g \circ f$ es diferenciable, y su derivada es dada por la regla de la cadena

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

3. Sean $f_1 : X \rightarrow Y_1, \dots, f_n : X \rightarrow Y_n$, funciones y $f : X \rightarrow Y_1 \times \dots \times Y_n$ dada por $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$, entonces f es diferenciable si, solamente si, f_1, \dots, f_n son diferenciables.
4. Si $f : X \rightarrow Y$ es una transformación lineal continua, entonces $f'(x) = f$, para $x \in X$.
5. Sea $f : U \subset X \rightarrow Y$, una función k -veces continuamente diferenciable. Definimos la C^k -norma por

$$\|f\|_k = \|f\|_0 + \|f'\|_0 + \dots + \|f^k\|_0,$$

donde $\|\cdot\|_0$ es la norma usual del supremo, por ejemplo,

$$\|f\|_0 = \sup_{x \in U} \{f(x)\}$$

y

$$\|f'\|_0 = \sup_{u \in U} \left(\sup_{\|x\|=1} \|f'(u)x\| \right).$$

Denotaremos por $L(E, F)$ el espacio de Banach de las transformaciones lineales continuas de E en F .

Definición 2.16 (Derivada parcial). Supongamos que E, E_1, E_2 y F son espacios de Banach, y $U \subset E$. Considere $E = E_1 \oplus E_2$ y $f : U \rightarrow F$ una función. Las derivadas parciales de f en

el punto $(a, b) \in U$ son aplicaciones lineales $\partial_1 f(a, b) : E_1 \rightarrow F$, $\partial_2 f(a, b) : E_2 \rightarrow F$, definidas por las siguientes relaciones:

$$f(a + h, b) = f(a, b) + \partial_1 f(a, b)h + r_1(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_1(h)}{|h|} = 0,$$

$$f(a, b + k) = f(a, b) + \partial_2 f(a, b)k + r_2(k), \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{r_2(k)}{|k|} = 0.$$

Observación 2.8.

1. Note que la función f puede poseer una, ambas, o ninguna de las derivadas parciales $\partial_1 f(a, b)$, $\partial_2 f(a, b)$ en un punto $(a, b) \in U$.
2. También usamos las notaciones $D_1 f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \in L(E_1, F)$ e $D_2 f(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \in L(E_2, F)$ para las derivadas parciales.
3. La derivada parcial $D_1 f(a, b)$, caso exista, es la derivada de la “función parcial” $g : E_1 \cap U \rightarrow F$, $g(x) = f(x, b)$ en el punto $a \in E_1$, análogamente para $D_2 f(a, b)$ si existe la derivada de la “función parcial” $h : E_2 \cap U \rightarrow F$, $h(x) = f(a, x)$.
4. Si la función $f : U \rightarrow F$ es diferenciable en el punto $c \in U$, entonces, para cualquier descomposición en suma directa $E = E_1 \oplus E_2$, con $c = (a, b)$, $a \in E_1$, $b \in E_2$, las derivadas parciales $\partial_1 f(c)$, $\partial_2 f(c)$ existen, y

$$f'(c).(h, k) = \partial_1 f(c).h + \partial_2 f(c).k$$

En otras palabras, $\partial_1 f(c) = f'(c)|_{E_1}$, $\partial_2 f(c) = f'(c)|_{E_2}$.

La recíproca es falsa, si consideramos la descomposición en suma directa usual $\mathbb{R}^2 = E \oplus F$, onde $E = \text{eje } x$ y $F = \text{eje } y$. La función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

tiene en el origen $c = (0, 0)$ las derivadas parciales $\partial_1 f(c) = 0$ y $\partial_2 f(c) = 0$, mas f no es diferenciable en el origen.

Lema 2.1. Sea F un espacio de Banach y sean las funciones diferenciables $f : [a, b] \rightarrow F$ y $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, con $\|f'(t)\| \leq g'(t)$ para todo $t \in [a, b]$ y $g'(t) > 0$ para todo $t \in (a, b)$; entonces

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

Demostración: Consideremos el conjunto

$$X = \{t \in [a, b]; \|f(t) - f(a)\| \leq g(t) - g(a) + \epsilon t + \epsilon\}.$$

Notemos que $0 \in X$, así $X \neq \emptyset$. Por otro lado por la continuidad de f y g , entonces existe un $c > a$ tal que $[a, c]$. De ahí obtenemos que el $\sup X > a$.

Vamos a verificar que $\sup X = b$. De hecho, tenemos que $a < \sup X \leq b$ y por la continuidad de f y g que X es un conjunto cerrado. Así, desde que, $\sup X \in \overline{X} = X$, entonces $\sup X \in X$.

Afirmación: Si $a < s = \sup < b$, entonces existe $h > 0$ tal que $s + h \in X$.

Si la afirmación es probada, esto nos lleva a una contradicción con la definición de supremo. Esto prueba que $b \in X$, obteniendo el resultado deseado.

Ahora, vamos a probar la Afirmación. Como f es diferenciable en s , entonces para $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que se $0 < h < \delta$ de modo que

$$\left\| \frac{f(s+h) - f(s)}{h} - f'(s) \right\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

De aquí,

$$\left\| \frac{f(s+h) - f(s)}{h} \right\| - \frac{\epsilon}{2} < \|f'(s)\|. \quad (2.1)$$

De forma similar, obtenemos

$$- \frac{g(s+h) - g(s)}{h} + g'(s) < \frac{\epsilon}{2}. \quad (2.2)$$

Por tanto de la Ecs. (2.1) y (2.2) y la condición $\|f'(t)\| \leq g'(t)$ tenemos,

$$\frac{\|f(s+h) - f(s)\|}{h} < \frac{\epsilon h + g(s+h) - g(s)}{h},$$

lo que nos lleva a

$$\left\| \frac{f(s+h) - f(s)}{h} \right\| < \epsilon h + g(s+h) - g(s).$$

De aquí y del hecho que $s \in X$, obtenemos que

$$\begin{aligned}
 \|f(s+h) - f(s) + f(s) - f(a)\| &\leq \|f(s+h) - f(s)\| + \|f(s) - f(a)\| \\
 &< \epsilon h + g(s+h) - g(s) + \|f(s) - f(a)\| \\
 &< \epsilon h + g(s+h) - g(s) + g(s) - g(a) + \epsilon s + \epsilon \\
 &< \epsilon(s+h) + g(s+h) - g(a) + \epsilon.
 \end{aligned}$$

Entonces $s+h \in X$, lo que prueba la afirmación. Por tanto, terminamos la demostración del lema. ■

Teorema 2.2 (Desigualdad del valor medio I). Sea F un espacio de Banach y $f : [0, 1] \rightarrow F$ un camino continuo y diferenciable en el abierto (p, q) . Si $|f'(t)| \leq M$ para $t \in (p, q)$, entonces

$$\|f(p) - f(q)\| \leq M \cdot (q - p).$$

Demostración: Se sigue inmediatamente del Lema anterior, considerando la función $g(t) = Mt$. ■

Teorema 2.3 (Desigualdad del valor medio II). Considere los espacios de Banach E, F y $f : U \subset E \rightarrow F$ una función. Si f es continua en el segmento de recta $[a, a+h] \subset U$ y f diferenciable en todos los puntos del segmento abierto $(a, a+h)$, entonces

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leq \|h\| \cdot \sup_{0 < t < 1} \|f'(t)\|.$$

Demostración: Definamos el camino $g : [0, 1] \rightarrow F$, $g(t) = f(a+th)$, tenemos que g es continua en $[0, 1]$ y diferenciable en $(0, 1)$, con $g(0) = f(a)$, $g(1) = f(a+h)$. Por la regla de la cadena, $g'(t) = f'(a+th)h$ y tomando la norma en ambos lados obtenemos

$$\|g'(t)\| \leq \|f'(a+th)h\| \leq \sup_{0 < t < 1} \|f'(a+th)\| \|h\|.$$

Por el teorema del valor medio para caminos obtenemos que

$$\|g(1) - g(0)\| \leq \sup_{0 < t < 1} \|f'(a+th)\| \|h\|.$$
■

Corolário 2.3. Sea $U \subset F$ abierto y convexo. Si $f : U \rightarrow F$ es diferenciable, tal que $\|f'(x)\| \leq M$ para todo $x \in U$, entonces f es Lipschitziana, con

$$\|f(y) - f(x)\| \leq M\|x - y\|,$$

para cualquier $x, y \in U$.

Demostración: En efecto, desde que f es continua en U y $x, y \in U$. Entonces $[x, y] \subset U$, por la convexidad. Luego por la desigualdad del valor médio obtenemos el resultado deseado. ■

Teorema 2.4 (Teorema fundamental del cálculo). Sean E, F espacios de Banach, y sea U un abierto tal que $U \subset E$. Considere $f : U \rightarrow F$ una función de clase C^1 y $[x, y] \subset U$. Entonces

$$f(x + y) = f(x) + \int_0^1 Df(x + ty)dt.$$

Demostración: Defina la función $g(t) : [0, 1] \rightarrow F$, dada por $g(t) = f(x + ty)$, entonces por la regla de la cadena se tiene que $g'(t) = Df(x + ty)y$. Ahora, considere la función $h : [0, 1] \rightarrow F$, $h(t) = f(x) + \int_0^t f(x + sy)ds$. Así para $0 < t < 1$ se tiene que $h'(t) = Df(x + ty).y$. Luego, por la continuidad de Df y por el Corolário 2.3 se obtiene que $g - h$ es constante, pues g, h son continuas sobre $[0, 1]$, desde que $g(0) = h(0) = 0$, entonces $g(1) = h(1)$. ■

2.3 Operadores Lineales Acotados

En esta sección presentaremos algunas definiciones y resultados principales de operadores lineales acotados en espacio de Banach, que nos servirán de apoyo para los siguientes capítulos. Para este fin, usaremos de manera próxima los libros de Diudonné [Die69], Irwin [Irw01], las notas de Alves [Alv14] y el artículo de Cabré-Fontich-de la Llave [Cab03].

Definición 2.17. Considere un espacio de Banach sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} con norma $\|\cdot\|$. Decimos que un operador lineal es acotado si

$$\|T\| \equiv \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| < \infty,$$

y definimos

$$L(E) = \{T : E \rightarrow E \mid T \text{ es lineal y acotado}\}.$$

Notemos que el conjunto $L(E)$ es un espacio de Banach con la norma $\|T\|$, pues E es un espacio de Banach

Lema 2.2. Sean E un espacio de Banach, $T \in L(E)$ y $S \in L(E)$ isomorfismo. Entonces,

1. si $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ converge, entonces $(I - T)$ es invertible y $(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$;
2. si $\|T\| \leq a < 1$, entonces $(I - T)$ es invertible y $(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ y $\|(I - T)^{-1}\| \leq 1/(1 - a)$;
3. si $\|S^{-1}\| \leq a < 1$, entonces $(I - S)$ es invertible y $\|(I - S)^{-1}\| \leq a/(1 - a)$.

Definición 2.18 (Espectro y resolvente de un operador lineal). Sea E un espacio vectorial normado complejo y sea $T : E \rightarrow E$ un operador lineal acotado. Definimos el espectro de T como el conjunto

$$\sigma(T) := \{\mu \in \mathbb{C} : (I - \mu T) \text{ no es invertible}\}$$

y el conjunto resolvente de T como $\rho(T) := \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$.

Dado $\lambda \in \rho(T)$, el operador resolvente de T en μ es definido como $R_\mu(T) = (\mu I - T)^{-1}$.

Observación 2.9.

- Note que la definición de espectro de T es independiente de la métrica o norma de E , mas apenas de T , esto es, si $(T - \mu I)$ es o no sobrejetivo e inyectivo.
- De la misma forma que en dimensión finita, el complejizado de T es el operador lineal $T_{\mathbb{C}} : E \times E \rightarrow E \times E$ definido por: $T_{\mathbb{C}}(v, w) = (Tv, Tw)$. Además, vemos $E_{\mathbb{C}} := E \times E$ como un espacio complejo, de la forma $x + iy$, $x \in E$ e $y \in E$, con norma $\|x + iy\|_{\mathbb{C}} = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$.
- Se puede probar que $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$ define una norma en $E_{\mathbb{C}}$, tal que

$$\max\{\|x\|, \|y\|\} \leq \|x + iy\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

- Considere E es un espacio de Banach real con norma $\|\cdot\|$, entonces $E_{\mathbb{C}}$ es también un espacio de Banach complejo con norma $\|\cdot\|_{\mathbb{C}}$.
- Se tiene que $\|T_{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} = \|T\|$.
- Si E es un espacio de Banach real. La aplicación $L(E) \ni T \mapsto T_{\mathbb{C}} \in L(E_{\mathbb{C}})$ es continua.
- Sea $T \in L(E)$, donde E es un espacio de Banach real, definimos su espectro $\sigma(T)$ como o espectro de su complejización, esto es,

$$\sigma(T) := \sigma(T_{\mathbb{C}}).$$

- Vamos a identificar T con $T_{\mathbb{C}|E \times 0}$. En algunas momentos de este trabajo, quando no haya posibilidad de confusión, usaremos la misma letra para T y su complejicado.
- Vale la pena señalar que por el Teorema de la aplicación abierta tenemos que $R_\lambda(T)$ es un operador lineal acotado para cualquier $T \in L(E)$ y $\lambda \in \rho(T)$. Además, si λ es un autovalor de T , entonces $\lambda \in \sigma(T)$.
- Recordando que un aplicación lineal de un espacio dimensional finito en si mismo es invertible si y solo si la aplicación es inyectiva, tenemos que el espectro de un operador lineal en un espacio vectorial complejo de dimensión finita coincide con el conjunto de autovalores de ese operador. Sin embargo, en espacios dimensionales infinitos podemos tener elementos en el espectro de un operador que no son autovalores, como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3. Considere el espacio vectorial de sucesiones absolutamente sumables en \mathbb{C}

$$l^1 = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) : x_n \in \mathbb{C} \text{ y } \sum_{n \geq 1} |x_n| < \infty\}.$$

Se tiene que $\|(x_1, x_2, x_3, \dots)\| = \sum_{n \geq 1} |x_n|$ define una norma en l^1 , y con esta norma l^1 es un espacio de Banach. Definamos el operador lineal $T : l^1 \rightarrow l^1$, donde $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Es claro que $0I - T = -T$ no es invertible, por lo que $0 \in \sigma(A)$. Sin embargo, 0 no es un autovalor de A .

Sea E un espacio de Banach. Denotamos por $GL(E)$ el conjunto de todos los elementos en $L(E)$ que son invertibles. Teniendo en cuenta el teorema de la aplicación abierta tenemos que $A^{-1} \in GL(E)$, siempre que $A \in GL(E)$.

A continuación, damos un resultado sobre el espectro de operadores inversos y conjugados, que es bien conocido para isomorfismos de espacios en dimensión finita.

Lema 2.3. Sea F un espacio vectorial normado complejo y sean $S, T : F \rightarrow F$ isomorfismos lineales. Entonces:

1. $\sigma(S^{-1}) = \{\frac{1}{\mu} : \mu \in \sigma(S)\};$
2. $\sigma(S) = \sigma(TST^{-1}).$

Demostración: En primer lugar, observe que como T es invertible, entonces $0 \notin \sigma(T)$. Además, tenemos para $\mu \neq 0$

$$\mu I - S = -\mu S \left(\frac{1}{\mu} I - S^{-1} \right).$$

Por lo tanto, si $S \in GL(E)$, entonces $(I\mu - S)$ es invertible si y solo si $\left(\frac{1}{\mu}I - S^{-1}\right)$ es invertible. Esto Prueba la primera afirmación.

Dados $T \in GL(E)$ y $\mu \in \mathbb{C}$, tenemos que

$$\mu I - TST^{-1} = T(\mu I - S)T^{-1}.$$

De aquí, $\mu I - TST^{-1}$ es invertible si y solo si $\mu I - S$ es invertible. ■

En el siguiente resultado consideramos funciones analíticas definidas en algún conjunto abierto del plano complejo y tomando valores en un espacio de Banach complejo. Esencialmente todas las definiciones principales y resultados de la teoría de funciones complejas, como Integrales de contorno, Teorema de Residuos y el Teorema de Liouville siguen siendo válidos en este contexto más general; ver [Die69].

Teorema 2.5. *Considere un espacio de Banach complejo E y $T \in L(E)$. Entonces:*

1. $\rho(T)$ es un conjunto abierto y $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|T\|\} \subset \rho(T)$;
2. $R_\lambda(T) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^n}$, para $|\lambda| > \|T\|$;
3. $\lambda \in \rho(T) \mapsto R_\lambda(T)$ es una función analítica;
4. $\sigma(T)$ es compacto y $\sigma(T) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|T\|\}$.

Definición 2.19. *Considere un espacio de Banach complejo E . Definimos el radio espectral de un operador lineal $A \in L(E)$ como*

$$r(A) := \sup_{\mu \in \sigma(A)} |\mu|.$$

Observación 2.10. Del Teorema anterior tenemos que $r(A) \leq \|A\|$.

Sea E un espacio de Banach complejo y $T \in L(E)$. Entonces el siguiente resultado muestra que si el espectro de un operador en un espacio complejo de Banach se puede dividir en dos partes compactas disjuntas, entonces correspondiendo a dicha división en el espectro hay una división en el espacio.

Teorema 2.6 (Descomposición espectral). *Sea E un espacio de Banach complejo y $T \in L(E)$. Asuma que $\sigma(T) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ son conjuntos compactos disjuntos. Entonces, existen espacios cerrados E_1, E_2 con*

1. $E = E_1 \oplus E_2$;
2. $T(E_1) \subset E_1$ y $T(E_2) \subset E_2$;

$$3. \sigma(T|_{E_1}) = \sigma_1 \text{ y } \sigma(T|_{E_2}) = \sigma_2.$$

En el siguiente resultado, establecemos una caracterización útil de las contracciones en espacios complejos de Banach.

Proposición 2.2. *Sea E un espacio de Banach complejo y $T \in L(E)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $\sigma(T) < 1$;
2. existe una norma $|\cdot|$ equivalente a $\|\cdot\|$ tal que $|T| < 1$;
3. existen $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que $\|T^n x\| \leq C\lambda^n \|x\|$ para todo $x \in E$ y $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.7 (Fórmula de radio espectral de Gelfand [NJD58]). *Sea E un espacio de Banach complejo y $T \in L(E)$. Entonces*

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = \inf_{n \geq 1} \|T^n\|^{1/n}.$$

2.3.1 Normas Adaptadas

A seguir daremos algunos teoremas con respecto a normas adaptadas que serán muy útiles en la prueba del Teorema Principal.

Teorema 2.8 (Fórmula de radio espectral de Holmes [Hol68]). *Sea N el conjunto de todas las normas en $L(E)$ inducidas por las normas en E equivalente a la norma dada $|\cdot|$. Entonces*

$$r(T) = \inf\{\|T\| : \|\cdot\| \in N\}.$$

Como una consecuencia de este Teorema tenemos el siguiente resultado bastante útil.

Corolario 2.4. *Sea E un espacio de Banach complejo y $T \in L(E)$. Entonces, dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar una norma $\|\cdot\|_\epsilon$ equivalente a la norma original, tal que*

$$\|T\|_\epsilon < r(T) + \epsilon.$$

Decimos que la norma $\|\cdot\|_\epsilon$ es ϵ -adaptada para T

Combinando este Corolario y la fórmula de radio espectral de Gelfand tenemos el siguiente corolario.

Corolário 2.5 ([Cab03]). Sea E un espacio de Banach complejo y $T \in L(E)$ un isomorfismo. Entonces, podemos encontrar una norma $\|\cdot\|_\epsilon$ ϵ -adaptada para T y T^{-1} simultaneamente, esto es,

$$\|T\|_\epsilon \leq r(T) + \epsilon, \quad \|T^{-1}\|_\epsilon \leq r(T^{-1}) + \epsilon.$$

A seguir tenemos un resultado más general.

Teorema 2.9 ([Cab03]). Sea X un espacio de Banach, tal que $X = X_1 \oplus X_2$ es la suma directa de dos espacios cerrados, y sea $A \in L(X)$ tal que

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

con respecto a la descomposición arriba. Entonces,

$$(a) \quad r(A) = \max\{r(A_1), r(A_2)\}.$$

$$(b) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & A_1^{-1}BA_2^{-1} \\ 0 & A_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$(c) \quad r(A^{-1}) = \max\{r(A_1^{-1}), r(A_2^{-1})\}.$$

(d) Asuma A_1 y A_2 invertibles. Entonces, para cualquier $\epsilon > 0$, existe una norma $\|\cdot\|_\epsilon$ en X el cual es equivalente a la norma original y tal que

$$\begin{aligned} \|A_1\|_\epsilon &\leq r(A_1) + \epsilon, & \|A_1^{-1}\|_\epsilon &\leq r(A_1^{-1}) + \epsilon, \\ \|A_2\|_\epsilon &\leq r(A_2) + \epsilon, & \|A_2^{-1}\|_\epsilon &\leq r(A_2^{-1}) + \epsilon, \\ \|A\|_\epsilon &\leq r(A) + \epsilon & \|A^{-1}\|_\epsilon &\leq r(A^{-1}) + \epsilon, \end{aligned}$$

y

$$\|B\|_\epsilon \leq \epsilon.$$

2.3.2 Isomorfismos Hiperbólicos

A continuación pasaremos a estudiar una clase importante de subconjunto de $GL(E)$, llamado de isomorfismos hiperbólicos. Recuerde que que $GL(E)$ denota el conjunto de todos los elementos en $L(E)$ que son invertibles.

Definición 2.20 (Isomorfismos hiperbólicos). Sea E un espacio de Banach. Decimos que $A \in GL(E)$ es hiperbólico si

$$\sigma(A) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset,$$

donde $\mathbb{S}^1 = \{z \in K : \|z\| = 1\}$.

Definimos $H(E) = \{A \in GL(E) : A \text{ es hiperbólico}\}$.

Observación 2.11. Usando el Lema 2.2, tenemos que si $H \in H(E)$, entonces $(I - H)$ es invertible y

$$\|(I - H)^{-1}\| \leq \frac{\|H^{-1}\|}{1 - \|H\|^{-1}}.$$

Proposición 2.3. Considere E un espacio de Banach. Entonces $H(E)$ es un conjunto abierto de $GL(E)$

Definición 2.21. Definimos el espacio estable de $A \in GL(E)$ como

$$E^s = \{x \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} A^n x = 0\},$$

y espacio inestable de $A \in GL(E)$ como

$$E^u = \{x \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} A^{-n} x = 0\}.$$

Observación 2.12. Podemos verificar que los espacios E^s y E^u son subespacios lineales invariantes por A ,

$$A(E^s) = E^s, \quad A(E^u) = E^u.$$

El siguiente resultado muestra que los espacios estables e inestables son complementarios cuando el isomorfismo es hiperbólico. Claramente, esto no es necesariamente cierto sin la hipótesis de la hiperbolicidad, incluso en dimensión finita.

Teorema 2.10 (). Sea E un espacio de Banach y $A \in H(E)$. Entonces $E = E^s \oplus E^u$, donde E^s y E^u son conjuntos cerrados.

Definición 2.22. Sea E un espacio de Banach y $A \in H(E)$. Vamos a llamar $E = E^s \oplus E^u$ de descomposición hiperbólica de A , y denotamos $A^s = A|_{E^s}$ y $A^u = A|_{E^u}$.

Definición 2.23. Considere $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $E = E^s \oplus E^u$ la descomposición hiperbólica de $A \in H(E)$. Decimos que la norma $|\cdot|$ en E es adaptada para A si tenemos las siguientes condiciones:

1. $|\cdot|$ es equivalente a $\|\cdot\|$;
2. $|x^s + x^u| = \max\{|x^s|, |x^u|\}$, para todo $x^s \in E^s$ y $x^u \in E^u$;
3. $|A^s| < 1$ y $|(A^u)^{-1}| < 1$.

Teorema 2.11. *Sea E un espacio de Banach y $A \in H(E)$. Entonces A tiene una norma adaptada.*

Corolario 2.6. *Sea E espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$ y $E = E^s \oplus E^u$ la descomposición hiperbólica de $A \in H(E)$. Entonces existe $C > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que*

1. $\|A^n\| \leq C\lambda\|x\|$ para todo $x \in E^s$;
2. $\|A^{-n}\| \leq C\lambda\|x\|$ para todo $x \in E^u$.

2.4 Nociones de Sistemas Dinámicos

En esta sección presentaremos algunas definiciones y algunos principales resultados de sistemas dinámicos, los cuales servirán como motivación para nuestros resultados principales.

Definición 2.24. *Considere un espacio topológico M . Llamamos sistema dinámico discreto en M a una función $H : \mathbb{Z} \times M \rightarrow M$ continua que satisface las siguientes condiciones:*

1. $H(0, x) = x$,
2. $H(m, H(n, x)) = H(m + n, x)$, para $m, n \in \mathbb{Z}$ y $x \in M$.

Observación 2.13. Para cada número entero $m \in \mathbb{Z}$ podemos definir la aplicación $H_m : M \rightarrow M$, con $H_m(x) = H(m, x)$. Por definición se tiene que $H_n \circ H_m = H_{n+m}$, para $n, m \in \mathbb{Z}$. Así, particularmente tenemos que $h = H_1$ es un homeomorfismo con inversa $h^{-1}(x) = H_{-1}(x)$ y se cumple $H_n = h^n$. Esto nos dice, que un sistema dinámico discreto es generado por un homeomorfismo $h : M \rightarrow M$.

Definición 2.25. *Decimos que una aplicación $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ continua es un sistema dinámico continuo o flujo si satisface las siguientes condiciones:*

1. $\varphi(0, x) = x$,
2. $\varphi(t, \varphi(s, x)) = \varphi(t + s, x)$, para $t, s \in \mathbb{R}$ y $x \in M$.

Observación 2.14. De la misma forma al caso discreto para cada $t \in \mathbb{R}$ podemos definir una función $\varphi_t : M \rightarrow M$ por $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$ se tiene que $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{s+t}$, para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

Definición 2.26. *Consideremos $h : M \rightarrow M$ un homeomorfismo, $x \in M$. Entonces, definimos los siguientes conjuntos:*

1. *Órbita de $x \in M$, $\mathcal{O}(x) := \{h^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$.*

2. Órbita positiva o futura de $x \in M$, $\mathcal{O}^+(x) := \{h^n(x) : n \geq 0\}$.
3. Órbita negativa o pasada de $x \in M$, $\mathcal{O}^-(x) := \{h^n(x) : n \leq 0\}$.

De forma similar definimos para el caso continuo.

Definición 2.27. Sea $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ un flujo, $x \in M$. Entonces, se define los siguientes conjuntos

1. Órbita de $x \in M$, $\mathcal{O}(x) := \{\varphi(t, x) : t \in \mathbb{R}\}$,
2. Órbita positiva o futura de $x \in M$, $\mathcal{O}^+(x) := \{\varphi(t, x) : t \geq 0\}$,
3. Órbita negativa o pasada de $x \in M$, $\mathcal{O}^-(x) := \{\varphi(t, x) : t \leq 0\}$.

Ejemplo 2.4. A seguir daremos algunos ejemplos de sistemas dinámicos

1. Consideremos la aplicación de Hénon $H_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$H_{a,b}(x, y) = (1 + y - ax^2, bx).$$

Tenemos que si $b \neq 0$ esta aplicación tiene inversa, y es dada por $H_{a,b}^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, donde

$$H_{a,b}^{-1}(x', y') = \left(\frac{y'}{b}, x' - 1 + \frac{ay'^2}{b^2} \right).$$

De ahí, $H_{a,b}$ genera un sistema dinámico discreto. Para el caso $b = 0$, tenemos que $H_{a,b}$ puede ser identificado con el sistema unidimensional $f_a(x) = 1 - ax^2$.

2. Identificando el conjunto $M = \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ con \mathbb{R}/\mathbb{Z} , mediante la función $\exp : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^1$, con $\exp(t) = e^{2\pi i t}$.

Definimos la rotación del ángulo α por $R_\alpha = x + \alpha \pmod{1}$, o equivalentemente, $R_\alpha(e^{2\pi i t}) = e^{2\pi i(t+\alpha)}$.

3. Consideremos una variedad compacta M y un campo de vectores tangentes de clase C^k , $k \geq 1$, $X : M \rightarrow TM$. En este caso, sabemos por la teoría de ecuaciones diferenciales que, para cada $x \in M$, existe una única función $\varphi_x : \mathbb{R} \rightarrow M$ C^{k+1} de modo que $\varphi_x(0) = x$ y $\frac{\partial \varphi_x(t)}{\partial t} = X(\varphi_x(t))$, para $t \in \mathbb{R}$.

Definiendo $\varphi(t, x) = \varphi_x(t)$ tenemos un flujo en M .

Definición 2.28. Consideremos un sistema dinámico discreto $h : M \rightarrow M$. Entonces,

- Decimos que un punto $q \in M$ es fijo, si $h(p) = p$.

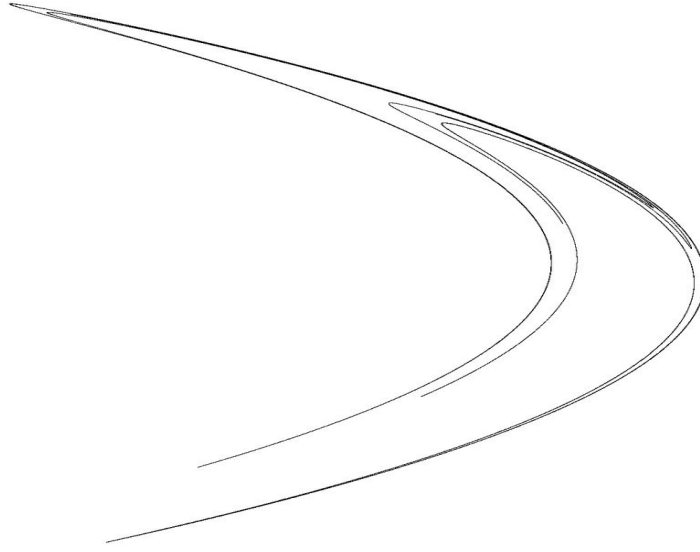


Figura 2.1: Atractor de Hénon para $a = 1,4$ y $b = 0,3$. Fuente: <https://bit.ly/2OeO5xB>

- Decimos que un punto $q \in M$ es periódico, si existe $k \geq 1$ con $h^k(p) = p$. En este caso definimos el período de q como $\min\{k \geq 1 : h^k(q) = q\}$.

De forma similar definimos para el caso continuo.

Definición 2.29. Consideremos un flujo $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$.

- Se dice que $p \in M$ es punto de equilibrio (o singularidad), si $\varphi_t(p) = p$, para $t \in \mathbb{R}$.
- Decimos que la órbita que pasa por $p \in M$ es periódica, si existe un número $t > 0$ tal que $\varphi_t(p) = p$, para algún $t > 0$. Llamamos período de p al $\min\{t > 0 : \varphi_t(p) = p\}$.

Definición 2.30. Considere un sistema dinámico discreto $h : M \rightarrow M$ y un punto $x \in M$. Definimos los siguientes conjuntos ω -límite y α -límite respectivamente,

$$\omega_h(x) := \{y \in M : \text{ existe } \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}, n_i \rightarrow \infty \text{ tal que } \lim_{i \rightarrow \infty} h^{n_i}(x) = y\},$$

$$\alpha_h(x) := \{y \in M : \text{ existe } \{n_i\}_{i \in \mathbb{N}}, n_i \rightarrow \infty \text{ tal que } \lim_{i \rightarrow \infty} h^{-n_i}(x) = y\}.$$

De forma similar definimos para el caso continuo definimos los conjuntos ω -límite y α -límite respectivamente,

$$\omega(x) := \{y \in M : \text{ existe } t_k \rightarrow +\infty \text{ tal que } \varphi(t_k, x) \rightarrow y\},$$

$$\alpha(x) := \{y \in M : \text{ existe } t_k \rightarrow -\infty \text{ tal que } \varphi(t_k, x) \rightarrow y\}.$$

Observación 2.15.

1. En general omitimos el sub-índice h , denotando apenas por $\omega(x), \alpha(x)$ cuando no hay duda sobre cual es la función que estamos trabajando.
2. Considere $h : M \rightarrow M$ y p un punto periódico de h , se tiene que $\omega(p) = \alpha(p) = \mathcal{O}(p)$.
3. Considere un homeomorfismo creciente $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$. Entonces, $\omega(x) = \emptyset$; o $\omega(x)$ es un punto fijo.

Definición 2.31. Definimos el conjunto **límite** $L(f)$ por $L(f) = L_+(f) \cup L_-(f)$, donde

$$L_+(f) = \overline{\bigcup_{x \in M} \omega(x)}$$

y

$$L_-(f) = \overline{\bigcup_{x \in M} \alpha(x)}.$$

Si nada es dicho vamos asumir que X es un espacio topológico, localmente compacto y Hausdorff.

Definición 2.32. Sea $h : M \rightarrow M$ un sistema dinámico discreto. Un punto $x \in M$ es llamado no-errante, si dada una vecindad U de x , se tiene que existe $n \in \mathbb{N}$ de modo que $h^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Caso contrario, x será llamado de errante. El conjunto $\Omega = \Omega(h)$ denota el conjunto de todos los puntos no errantes de h .

Considere el flujo $\varphi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$, se dice que $x \in M$ es no errante si dada una vecindad U de x , existe $t \geq 1$ tal que $\varphi_t(U) \cap U \neq \emptyset$.

Definición 2.33 (Conjuntos minimales). Consideremos un sistema dinámico en M . Un subconjunto $G \subset M$ es llamado minimal (según el sistema dinámico) si:

1. G es invariante y cerrado,
2. no existe un subconjunto propio de G no vacío que sea invariante y cerrado (entonces, si $A \subset G$, $A \neq \emptyset$; A invariante y cerrado, entonces $A = G$).

Observación 2.16.

- ω_h es cerrado y $h(\Omega) \subset \Omega$.
- Si h es un homeomorfismo $h(\Omega) = \Omega$. Un punto es no-errante para h si, y solamente si, es no errante para h^{-1} .

- Si $x \in M$, entonces $\Omega(x) \subset \omega_h$ y $\alpha(x) \subset \omega(h)$.
- $L(h) \subset \omega_h$.
- Sea $Per(h)$ el conjunto de los puntos periódicos de h . Tenemos que

$$Per(h) \subset L(h) \subset \Omega_h.$$

2.4.1 Breve Introducción de Conjugación

A seguir vamos a definir y dar algunas propiedades de una noción importante en el área de sistemas dinámicos.

Definición 2.34 (Conjugación). Sean M y N dos espacios métricos. Decimos que dos sistemas dinámicos $f : M \rightarrow M$ y $g : N \rightarrow N$ son *tótopologicamente* (respect. C^k) *conjugados*, si existe un homeomorfismo (respect. un difeomorfismo C^k) $h : M \rightarrow N$ tal que

$$h \circ f = g \circ h.$$

En tal caso se dice que h *conjug*a a g con f .

Ejemplo 2.5. Sean $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones dadas por $f(x) = tx$ y $g(x) = x + \log(t)$, con $t \in \mathbb{R}$. Se tiene que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, donde $h(x) = \log(x)$. En efecto,

$$h(f(x)) = \log(tx) = \log(t) + \log(x) = g(h(x)).$$

Ejemplo 2.6. La función logística $f_4 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, dado por $f_4(x) = 4x(1 - x)$ y la función tienda $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, dado por $T(x) = 2x, x \leq \frac{1}{2}$ y $T(x) = 2 - 2x, x \geq \frac{1}{2}$ son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ dada por $h(x) = \sin^2(\frac{\pi x}{2})$.

Ejemplo 2.7. Sea la aplicación $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $A(x, y) = \left(\frac{7}{8}x - \frac{9}{8}y, -\frac{9}{8}x + \frac{7}{8}y \right)$. Tenemos que las órbitas de esta aplicación son $\{(x_{n+1}, y_{n+1}), n \in \mathbb{N}\}$, donde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{7}{8}x_n - \frac{9}{8}y_n, \\ y_{n+1} &= -\frac{9}{8}x_n + \frac{7}{8}y_n. \end{aligned}$$

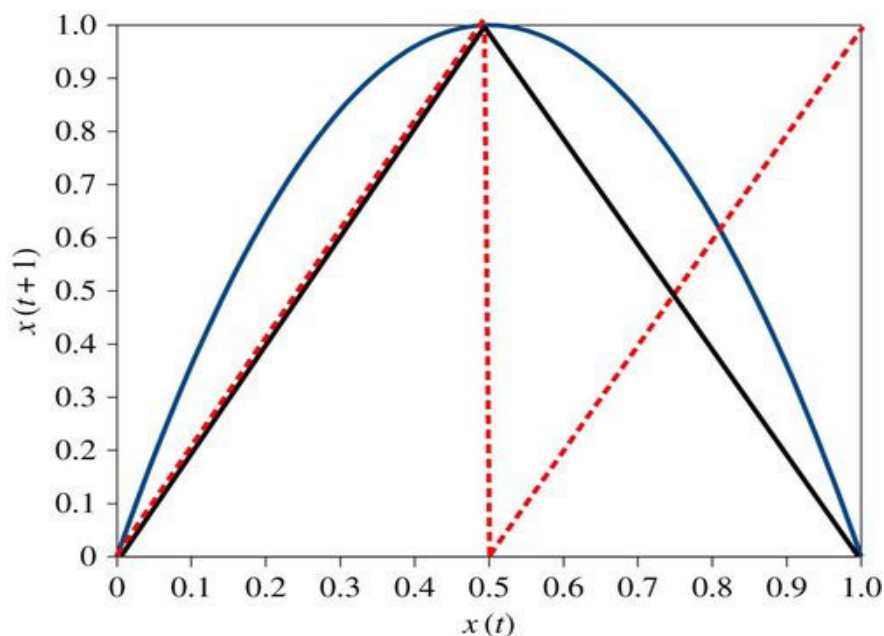


Figura 2.2: Funciones logística y tienda [Nee18].

Sea la aplicación lineal $B : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $B(x, y) = (2x, \frac{-1}{4}y)$ tipo “silla” (ver Ejemplo 4.1). Tenemos que las órbitas de esta aplicación son $\{(x_{n+1}, y_{n+1}), n \in \mathbb{N}\}$, donde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n, \\ y_{n+1} &= \frac{-1}{4}y_n. \end{aligned}$$

Se puede verificar que la rotación de 45° , $h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y, -x + y)$, es una función analítica con inversa analítica $h^{-1}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y, x + y)$ tal que,

$$A(h(x, y)) = h(B(x, y)).$$

Ejemplo 2.8. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x, \frac{1}{2}y - \frac{15}{8}x^3)$. Tenemos que las

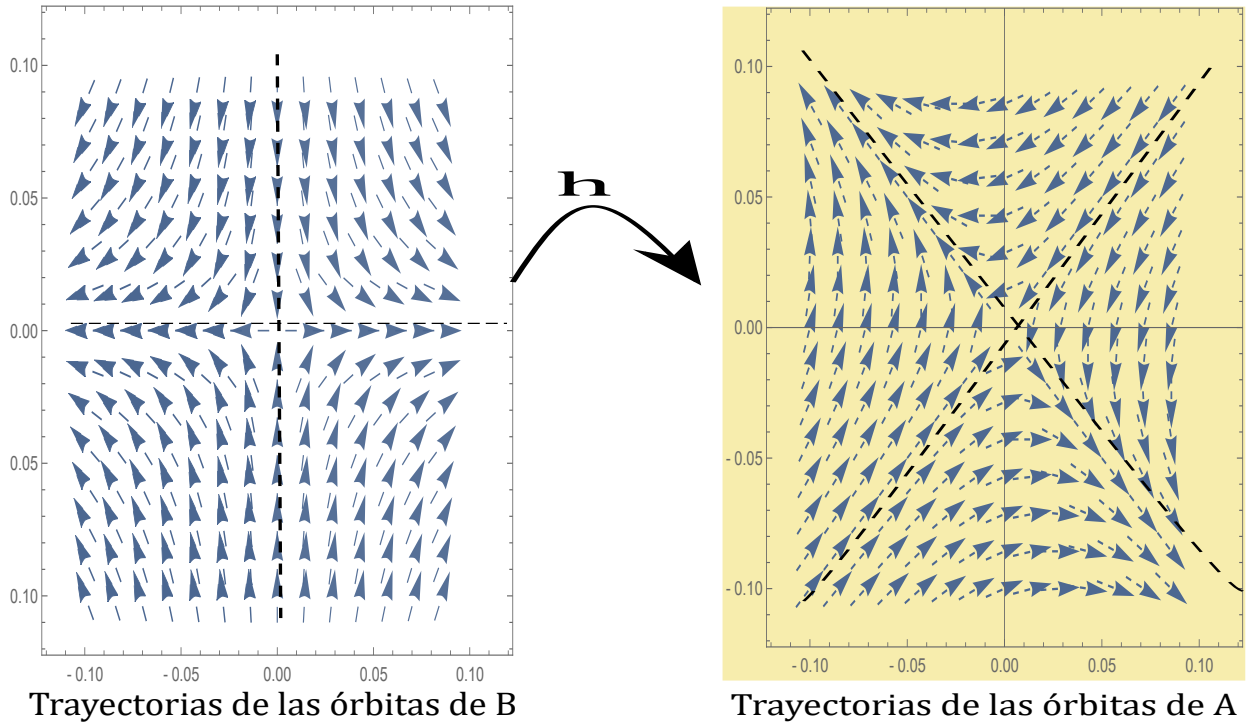


Figura 2.3: Conjugación de dos sillas.

órbitas de esta aplicación son $\{(x_{n+1}, y_{n+1}), n \in \mathbb{N}\}$, donde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n, \\ y_{n+1} &= \frac{1}{2}y_n - \frac{15}{8}x_n^3. \end{aligned}$$

Sea la aplicación lineal $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $A(x, y) = (2x, \frac{1}{2}y)$ tipo “silla” (ver Ejemplo 4.1). Tenemos que las órbitas de esta aplicación son $\{(x_{n+1}, y_{n+1}), n \in \mathbb{N}\}$, donde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 2x_n, \\ y_{n+1} &= \frac{1}{2}y_n. \end{aligned}$$

Se puede verificar que $h(x, y) = (x, y + \frac{x^3}{4})$ es una función analítica con inversa analítica $h^{-1}(x, y) = (x, y - \frac{x^3}{4})$ tal que

$$A(h(x, y)) = h(f(x, y)).$$

Teorema 2.12. Sean M y N espacios métricos. Si $f : M \rightarrow M$ y $g : M \rightarrow M$ son dos

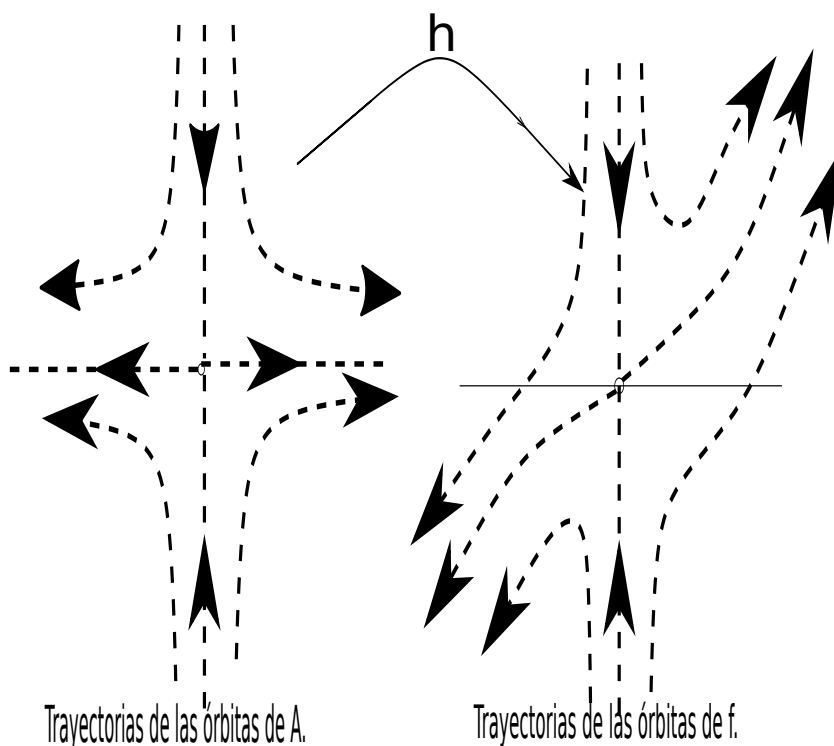


Figura 2.4: Conjugación de dos sillas, siendo una no-lineal.

funciones continuas tales que f y g son conjugadas mediante el homeomorfismo $h : M \rightarrow M$, entonces se cumplen las siguientes condiciones:

1. El conjunto $Per(f)$ es denso en M , si sólo si el conjunto $Per(g)$ es denso en N .
2. Si p es un punto periódico para f de periodo n , entonces $h(p)$ es un punto periódico para g de periodo n .
3. B es un conjunto minimal por f si, solamente si $h(B)$ es un conjunto minimal por g .
4. $h(\Omega_f(x)) = \Omega_g(h(x))$.
5. Para un punto x se define el conjunto estable como

$$W_g^s(x) = \{y \in M : \lim_{n \rightarrow \infty} d(g^n(y), g^n(x)) = 0\}$$

y si g es invertible, el conjunto inestable como $W_g^u(x) = W_{g^{-1}}^s(x)$.

Tenemos que

$$h(W_f^s(x)) = W_g^s(h(x)).$$

Análogamente para el inestable.

Teorema de Grobman-Hartman Para Sistemas Dinámicos Discretos

En este capítulo probaremos el Teorema de Grobman-Hartman para difeomorfismos, que nos dice que el comportamiento dinámico alrededor de un punto fijo hiperbólico es cualitativamente, al menos de homeomorfismos, el mismo que el comportamiento de su linealización cerca de este punto de equilibrio, donde la hiperbolicidad significa que ningún autovalor de la linealización tiene norma igual a uno. Por lo tanto, cuando se trata de este tipo de sistemas dinámicos se puede utilizar la linealización, que es más simple de ser tratada, para analizar su comportamiento en torno de puntos fijos hiperbólicos. Para tal fin, vamos a seguir de manera próxima los artículos de Hartman [Har60b], [Har63], Palis [Pal68] y los libros de Burns-Giede [BG05], Castro [Cas09], Nitecki [Nit71], Palis-de Mello [JPJ82] y Teschl [Tes12].

Definición 3.1 (Isomorfismos Hiperbólicos). Sea E un espacio de Banach. Decimos que $A \in GL(E)$ es hiperbólico si

$$\sigma(A) \cap \mathbb{S}^1 = \emptyset,$$

donde $\mathbb{S}^1 = \{z \in K : \|z\| = 1\}$.

Definición 3.2. Sea E un espacio de Banach y V una vecindad del punto $0 \in E$ y $f : V \rightarrow E$ un difeomorfismo sobre su imagen. Decimos que z es un punto fijo hiperbólico de f si y solamente si:

- (1) $f(z) = z$,
- (2) $Df(z) : E \rightarrow E$ es hiperbólica.

A continuación enunciaremos y probaremos el Teorema de Grobman-Hartman para Difeomorfismos.

Teorema 3.1 (Teorema de Grobman-Hartman para difeomorfismos [Gro59], [Har60a], [Pal68],[Nit71]). Sea E un espacio de Banach y V una vecindad del punto 0 en E , y sea $f : V \rightarrow E$ un difeomorfismo de clase C^k , $k \geq 1$ donde 0 es un punto fijo hiperbólico de f . Entonces, existe una vecindad U de 0 y un homeomorfismo $h : U \rightarrow h(U)$ tal que $h(U)$ es una vecindad de 0 en E , con $h(U) \subset V$, tal que

$$h \circ L(z) = f \circ h(z), \quad \text{para } z \in U.$$

Donde $L = Df(0)$.

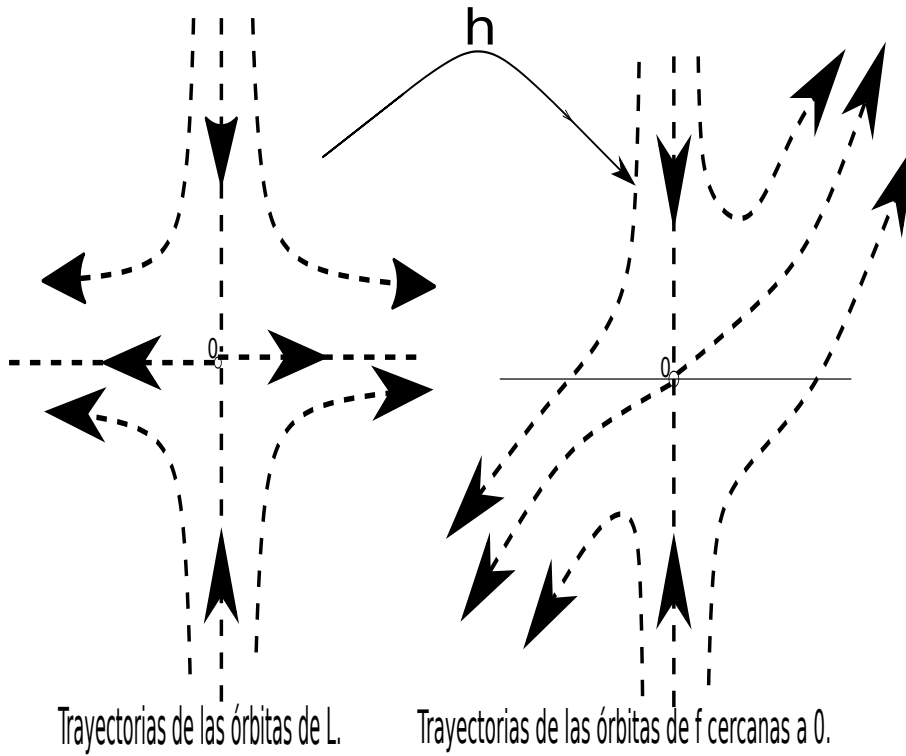


Figura 3.1: Interpretación geométrica del Teorema de G-H para difeomorfismos.

3.1 Prueba del Teorema de Grobman-Hartman Para Difeomorfismo

A continuación probaremos el Teorema de Grobman-Hartman.

Considere los espacios de Banach E_1 y E_2 . Ahora definamos los siguientes conjuntos,

$$C_b^0(E_1, E_2) = \{v : E_1 \rightarrow E_2 \mid v \text{ es una función continua y acotada}\}.$$

Para $C_b^0(E_1, E_2)$ definimos una norma

$$\|v\| = \sup_{x \in E_1} \|v(x)\|_{E_2}, \quad \text{para } v \in C_b^0(E_1, E_2).$$

Se puede verificar que $(C_b^0(E_1, E_2), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach.

Lema 3.1. Considere $L : E \rightarrow E$ una transformación lineal acotada invertible. Si $\varphi : E \rightarrow E$ es una función Lipschitz con

$$\text{Lip}(\varphi) < \|L^{-1}\|^{-1},$$

entonces $L + \varphi$ es invertible, con inversa Lipschitz, y

$$\text{Lip}[(L + \varphi)^{-1}] \leq \frac{\|L^{-1}\|}{-\text{Lip}(\varphi)\|L^{-1}\| + 1}.$$

Demostración:

Afirmación 1: $L + \varphi$ es inyectiva. Usando la desigualdade (2.1) se tiene que si $x, y \in E$, entonces

$$\begin{aligned} \|(L + \varphi)(x) - (L + \varphi)(y)\| &\geq (\|L^{-1}\|^{-1}\|x - y\| - \text{Lip}(\varphi)\|x - y\|) \\ &\geq (-\text{Lip}(\varphi) + \|L^{-1}\|^{-1})\|x - y\|. \end{aligned}$$

Desde que $(-\text{Lip}(\varphi) + \|L^{-1}\|^{-1}) > 0$ se llega a ver que,

$$\|(L + \varphi)(x) - (L + \varphi)(y)\| > 0.$$

Entonces, si $x \neq y$ implica, $(L + \varphi)(x) \neq (L + \varphi)(y)$. Esto prueba que $(L + \varphi)$ es inyectiva.

Afirmación 2: Ahora, probaremos que $L + \varphi$ es sobreyectiva (de manera que $(L + \varphi)^{-1}$ este definida en todo E), esto es, dado $y \in E$ necesitamos encontrar un $x \in E$ tal que

$$(L + \varphi)(x) = y. \tag{3.1}$$

Observemos que, si $\varphi \equiv 0$ la ecuación se convierte en $L(x) = y$

$$Lx_0 = y,$$

la cual tiene solución $x_0 = L^{-1}y$. La Ecuación (3.1) es equivalente a encontrar un $\delta \in E$

tal que

$$y = (L + \varphi)(x_0 + \delta), \quad (3.2)$$

que puede ser expandido

$$\begin{aligned} L(x_0) + L(\delta) + \varphi(x_0 + \delta) &= y \\ L(\delta) &= -\varphi(x_0 + \delta) \\ \delta &= -L^{-1}(\varphi(x_0 + \delta)). \end{aligned}$$

Esto quiere decir que resolver la ecuación $y = (L + \varphi)(x_0 + \delta)$, es equivalente a encontrar un δ de modo que

$$L^{-1}(x_0 + \delta) = \delta.$$

Para este fin, vamos usar el Teorema del Punto fijo de Banach-Cacciopoli 2.1 para

$$\begin{aligned} T &: E \longrightarrow E \\ v &\longrightarrow -L^{-1}(\varphi(x_0 + v)). \end{aligned}$$

Probaremos que T tiene un punto fijo. Para esto vamos a verificar que $Lip(T) < 1$.

De hecho,

$$\begin{aligned} \|T(a) - T(b)\| &= \|L^{-1}\varphi(x_0 + a) - L^{-1}\varphi(x_0 + b)\| \\ &\leq \|L^{-1}\|Lip(\varphi)\|(x_0 + a) - (x_0 + b)\| \\ &= \|L^{-1}\|Lip(\varphi)\|a - b\|. \end{aligned}$$

Desde que $\|L^{-1}\|Lip(\varphi) < 1$, tenemos que T es una contracción. Desde que E es un espacio de Banach entonces T tiene un punto fijo. Esto es, existe un δ tal que

$$y = (L + \varphi)(x_0 + \delta).$$

Lo cual muestra que $(L + \varphi)$ es sobreyectiva. Por tanto de las Afirmaciones (3.1) y (3.1) concluimos que $L + \varphi$ es una función biyectiva con

$$Lip(L + \varphi)^{-1} < \frac{\|L^{-1}\|}{-Lip(\varphi)\|L^{-1}\| + 1}.$$

Esto concluye la prueba. ■

Lema 3.2. Si $L : E \rightarrow E$ un isomorfismo lineal hiperbólico. Entonces, existe una norma $\|\cdot\|_2$ sobre E equivalente a la norma original y una descomposición directa de E satisfaciendo

- (1) $E = E^s \oplus E^u$,
- (2) $L(E^s) = E^s$ y $L(E^u) = E^u$,
- (3) Si $L_s := L|_{E^s} : E^s \rightarrow E^s$ y $L_u := L|_{E^u} : E^u \rightarrow E^u$. Entonces se tiene que L_s es una contracción $\|L_s\|_2 = \lambda < 1$ y si $v \in E^s$ implica $\|L(v)\|_2 \leq \lambda \|v\|_2$.
También se tiene que L_u es una expansión $\|L_u\|_2 = \frac{1}{\lambda}$ y entonces si $v \in E^u$ implica $\|L(v)\|_2 \geq \frac{1}{\lambda} \|v\|_2$.

Demostración: Esta prueba puede encontrarse en los trabajos [Pal68, JPJ82, Alv14, Irw01]. ■

Teorema 3.2. Sea $L : E \rightarrow E$ una aplicación lineal hiperbólica y acotada. Entonces, existe $\epsilon > 0$ de modo que cualquier función $\varphi \in C_b^0(E, E)$ con $Lip(\varphi) < \epsilon$ existe una única función $h_\varphi \in C_b^0(E, E)$ satisfaciendo

$$(I_d + h_\varphi) \circ L = (L + \varphi) \circ (I_d + h_\varphi).$$

Además, si ϵ es suficiente pequeño $I_d + h_\varphi : E \rightarrow E$ es un homeomorfismo.

Lema 3.3. Sea $L : E \rightarrow E$ una aplicación lineal acotada hiperbólica, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para toda $\varphi, \sigma \in C_b^0(E, E)$ con $Lip(\sigma), Lip(\varphi) < \epsilon$, existe una única $h_{\varphi, \sigma} \in C_b^0(E, E)$ de modo que

$$(I_d + h_{\varphi, \sigma}) \circ (L + \varphi) = (L + \sigma) \circ (h_{\varphi, \sigma} + I_d). \quad (3.3)$$

Demostración: La Ec. (3.3) es equivalente a encontrar una solución de la siguiente ecuación funcional

$$\begin{aligned} (I_d + h) \circ (L + \varphi) &= (L + \sigma) \circ (I_d + h) \\ \underbrace{L \circ h - h(L + \varphi)}_{L_\varphi(h)} &= \varphi - \sigma(I_d + h). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ahora, definamos la transformación lineal

$$\begin{aligned} L_\varphi : C_b^0(E, E) &\longrightarrow C_b^0(E, E) \\ v &\longrightarrow L \circ v - v(L + \varphi), \end{aligned}$$

Este Lema será verificado con los siguientes pasos.

Paso 1: Probar que L_φ es inversible.

Paso 2: Usando el Paso 1, la Ec.(3.4) es equivalente a encontrar un punto fijo de la función $L_\varphi(h) = \varphi - \sigma(I_d + h)$, entonces

$$\begin{aligned} L_\varphi(h) &= \varphi - \sigma(I_d + h) \\ h &= L_\varphi^{-1}(\varphi - \sigma(I_d + h)). \end{aligned}$$

Para verificar vamos a mostrar que si

$$Av = L_\varphi^{-1}(\varphi - \sigma(I_d + v)),$$

entonces A tiene un punto fijo. Para tal hecho, vamos a probar que A es una contracción en $C_b^0(E, E)$. Así, A tiene un único punto fijo, lo que concluiría la prueba del Lema.

Afirmación 1: L_φ es una transformación invertible. Si tomamos un ϵ suficientemente pequeño, tenemos por el Lema 3.1 que la aplicación $L + \varphi$ es invertible. Así, podemos definir

$$\begin{aligned} L_\varphi^* : C_b^0(E, E) &\longrightarrow C_b^0(E, E) \\ f &\longrightarrow L \circ f \circ (L + \varphi)^{-1}. \end{aligned}$$

Note que,

$$L_\varphi(f) = (L_\varphi^* - I_d)(f \circ (L + \varphi)).$$

De hecho,

$$\begin{aligned} (L_\varphi^* - I_d)(f \circ (L + \varphi)) &= (L \circ f \circ (L + \varphi))(L + \varphi)^{-1} - f(L + \varphi) \\ &= L \circ f - f(L + \varphi) \\ &= L_\varphi(f). \end{aligned}$$

Sub afirmación: L_φ^* es un operador hiperbólico. En efecto.

Notemos que $C^s = C_b^0(E, E^s)$ y $C^u = C_b^0(E, E^u)$ son invariantes por L_φ^* . De ahí, podemos escribir

$$L_\varphi^* = L_\varphi^{*s} + L_\varphi^{*u},$$

donde

$$\begin{aligned} L_\varphi^{*s} &:= L_\varphi^*|_{C_b^0(E, E^s)}, & L_\varphi^{*s} &: C_b^0(E, E^s) \rightarrow C_b^0(E, E^s); \\ L_\varphi^{*u} &:= L_\varphi^*|_{C_b^0(E, E^u)}, & L_\varphi^{*u} &: C_b^0(E, E^u) \rightarrow C_b^0(E, E^u). \end{aligned}$$

Note que, si $h : E \rightarrow E$ es un homeomorfismo y $f : E \rightarrow E$ es una función cualquier, entonces

$$\|f \circ h\|_\infty = \sup_{x \in E} \|(f \circ h)(x)\| = \sup_{y \in E} \|f(y)\| = \|f\|_\infty.$$

De ahí, si $f : E \rightarrow E^s$ entonces

$$\|L_\varphi^* f\|_\infty = \|L \circ f \circ (L + \varphi)^{-1}\|_\infty = \|L \circ f\|_\infty \leq \lambda \|f\|_\infty.$$

Si $f : E \rightarrow E^u$, entonces

$$\|L_\varphi^* f\|_\infty = \|L \circ f\|_\infty \geq \frac{1}{\lambda} \|f\|_\infty.$$

De ahí, tenemos que $L_\varphi^* : E \rightarrow E$ es hiperbólico. Tenemos por la Observación 2.11 que si H es un operador lineal e hiperbólico, entonces $(H - I_d)$ es invertible. Esto nos lleva a ver que $L_\varphi^* - I_d$, es invertible. Por tanto, L_φ es invertible, pues

$$L_\varphi^{-1} f = (L_\varphi^* - I_d)^{-1} (f \circ (L + \varphi)^{-1}).$$

Afirmación 2: Vamos a verificar que

$$\frac{1}{\|L\| + 1} \leq \|L_\varphi^{-1}\| \leq \frac{1}{\min\{1 - \lambda, \frac{1}{\lambda} - 1\}}.$$

Para esto, probaremos que:

$$\|L_\varphi(f)\|_\infty \geq \min\left(1 - \lambda, \frac{1}{\lambda} - 1\right) \|f\|_\infty.$$

Si $f \in C^s$, entonces $f \circ (L + \varphi) \in C^s$.

$$\begin{aligned} \|L_\varphi(f)\|_\infty &= \|(L_\varphi^* - I_d)(f \circ (L + \varphi))\|_\infty \\ &\geq \|f \circ (L + \varphi)\|_\infty - \|L_\varphi^*(f \circ (L + \varphi))\|_\infty \\ &\geq \|f\|_\infty - \lambda \|f\|_\infty = (1 - \lambda) \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Si $v \in C^u$, entonces

$$\begin{aligned} \|L_\varphi(f)\|_\infty &\geq \|L_\varphi^*(f \circ (L + \varphi))\|_\infty - \|f \circ (L + \varphi)\|_\infty \\ &\geq \frac{1}{\lambda} \|f\|_\infty - \|f\|_\infty = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

De donde, obtenemos que, si $f \in C_b^0(E, E)$ entonces

$$\|L_\varphi(f)\|_\infty \geq \min\left(1 - \lambda, \frac{1}{\lambda} - 1\right) \|f\|_\infty.$$

Afirmación 3: Ahora vamos a verificar que

$$\begin{aligned} A : C_b^0(E, E) &\rightarrow C_b^0(E, E) \\ v &\rightarrow L_\varphi^{-1}(\varphi - \sigma(I_d + v)), \end{aligned}$$

es una contracción, esto es, $Lip(A) < 1$.

$$\begin{aligned} |Av - Aw| &= |L_\varphi^{-1}(\varphi - \sigma(I_d + v)) - L_\varphi^{-1}(\varphi - \sigma(I_d + w))| \\ &\leq \frac{1}{\min\left(1 - \lambda, \frac{1}{\lambda} - 1\right)} |\sigma(I_d + v) - \sigma(I_d + w)| \\ &\leq \frac{1}{\min\left(1 - \lambda, \frac{1}{\lambda} - 1\right)} Lip(\sigma)|v - w|. \end{aligned}$$

Asumiendo que $Lip(\sigma) < \min\{1 - \lambda, \frac{1}{\lambda} - 1\}$, se sigue que A es una contracción.

Por tanto, hemos mostrado que si

$$Lip(\varphi) < \|L^{-1}\|^{-1},$$

y

$$Lip(\sigma) < \min\left(1 - \lambda, \frac{1}{\lambda} - 1\right),$$

entonces A es una contracción.

Así, tenemos que A tiene un único punto fijo $h \in C_b^0$ tal que

$$Ah = h,$$

que es equivalente a

$$(L + \sigma)(I_d + h) = (I_d + h)(L + \varphi).$$

Lo que concluye la prueba del Lema. ■

Ahora vamos a probar el Teorema 3.2, cuyo enunciado es el siguiente.

Teorema: Sea $L : E \rightarrow E$ una aplicación lineal hiperbólica y acotada. Entonces, existe $\epsilon > 0$ de modo que cualquier función $\varphi \in C_b^0(E, E)$ con $Lip(\varphi) < \epsilon$ existe una única función

$h_\varphi \in C_b^0(E, E)$ satisfaciendo

$$(I_d + h_\varphi) \circ L = (L + \varphi) \circ (I_d + h_\varphi).$$

Además, si ϵ es suficientemente pequeño $I_d + h_\varphi$ es un homeomorfismo de E en E .

Demostración: Usando el Lema 3.1 anterior, primero para $\psi = 0$ y luego para $\varphi = 0$, tenemos que existen funciones únicas $h_{\varphi,0}, h_{0,\varphi} \in C_b^0(E)$ tal que se tiene los siguientes diagramas conmutativos .

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{L} & E \\ I_d + h_{\varphi,0} \downarrow & & \downarrow I_d + h_{\varphi,0} \\ E & \xrightarrow{L + \varphi} & E \\ I_d + h_{0,\varphi} \downarrow & & \downarrow I_d + h_{0,\varphi} \\ E & \xrightarrow{L} & E \end{array}$$

Esto quiere decir que

$$(I_d + h_{\varphi,0}) \circ L = (L + \varphi) \circ (I_d + h_{\varphi,0}) \quad (3.5)$$

y

$$(I_d + h_{0,\varphi}) \circ (L + \varphi) = (L) \circ (I_d + h_{0,\varphi}) \quad (3.6)$$

Así aplicando $h_{0,\varphi}$ en Ec.(3.5) y luego usando Ec.(3.6) obtenemos

$$(I_d + h_{0,\varphi}) \circ (I_d + h_{\varphi,0}) \circ L = L \circ (I_d + h_{0,\varphi}) \circ (I_d + h_{\varphi,0}). \quad (3.7)$$

Luego, aplicando las respectivas composiciones tenemos

$$(I_d + h_{0,\varphi}) \circ (I_d + h_{\varphi,0}) = I_d + \underbrace{h_{\varphi,0} + h_{0,\varphi} + h_{0,\varphi} \circ h_{\varphi,0}}_{\tilde{h}},$$

luego

$$(I_d + \tilde{h}) \circ L = L \circ (I_d + \tilde{h}). \quad (3.8)$$

Por definición $\tilde{h} \in C_b^0(E)$. Note que, también tenemos

$$(I_d + 0) \circ L = L \circ (I_d + 0). \quad (3.9)$$

Entonces de las Ecs.(3.8), (3.9) y por la unicidad del Lema anterior se tiene que

$$\tilde{h} = 0.$$

Por tanto

$$(I_d + h_{0,\varphi}) \circ (I_d + h_{\varphi,0}) = I_d.$$

De forma análoga, se verifica que:

$$(I_d + h_{\varphi,0}) \circ (I_d + h_{0,\varphi}) \circ (L + \varphi) = (L + \varphi) \circ (I_d + h_{\varphi,0}) \circ (I_d + h_{0,\varphi}).$$

Lo que nos lleva a probar que,

$$(I_d + h_{\varphi,0}) \circ (I_d + h_{0,\varphi}) = I_d.$$

Por lo cual concluimos,

$$(I_d + h_{\varphi,0})^{-1} = (I_d + h_{0,\varphi}).$$

Así finalizamos la prueba del Teorema. ■

El Teorema 3.2 es nuestra herramienta básica para probar el Teorema de Grobman-Hartman. Solamente necesitamos verificar las hipótesis del teorema en nuestra situación. Esto lo hacemos con el siguiente Lema.

Lema 3.4. Sea E un espacio de Banach y $f : N \subset E \rightarrow E$ una función C^k , $k \geq 1$ en el abierto N tal que $0 \in N$, con $f(0) = 0$. Denote por $A = Df(0)$. Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe una vecindad $U = U(0)$ y una función $\phi \in C_b^0(E)$ Lipschitziana con constante de Lipschitz global acotada por ϵ tal que $(A + \phi) : E \mapsto E$ es la extensión de $f|_U$.

Demostración: Considere una función de clase C^∞ $\beta : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ con las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} \beta(t) &= 0, & t \geq 1, \\ \beta(t) &= 1, & t \leq \frac{1}{2}, \\ |\beta'(t)| &\leq k, & t \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde k es cualquier número real mayor que dos.

Se tiene que $f = A + \sigma$, con $\sigma(0) = 0$ y $D\sigma(0) = 0$. Desde que $D\sigma$ es una función continua podemos encontrar una bola B_r de centro 0 y radio $r > 0$ de modo que $\|D\sigma(x)\| < \frac{\epsilon}{2k}$, para $x \in B_r$.

Definamos

$$\phi(x) = \begin{cases} \beta\left(\frac{\|x\|}{r}\right) \sigma(x), & \|x\| < r \\ 0, & \|x\| \geq r. \end{cases}$$

De aquí ϕ es acotada en E , pues $\|\phi\| \leq \|\sigma\|$ y usando la desigualdad del valor medio, y la constante de Lipschitz de $\sigma|_{B_r}$ que es menor que $\frac{\epsilon}{2k}$.

En resumen :

$$\|\phi(x)\| \leq \|\sigma(x) - \sigma(0)\| \leq \frac{\epsilon}{2k}r, \quad \text{para } x \in B_r.$$

Mas aún, tenemos que $\sigma(x) = \phi(x)$ si $\|x\| < \frac{r}{2}$. De ahí, se tiene que $A + \phi$ es una extensión de $f|_{B_r}$.

Ahora, vamos a probar que ϕ es Lipschitziana, con $Lip(\phi) < \epsilon$.

La prueba será dividida en tres casos:

Caso 1: Si $x_1, x_2 \in B_r$, tenemos:

$$\begin{aligned} \|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| &= \left\| \beta\left(\frac{\|x_1\|}{r}\right)\sigma(x_1) - \beta\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right)\sigma(x_2) \right\| \\ &= \left\| \left(\beta\left(\frac{\|x_1\|}{r}\right) - \beta\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right) \right) \sigma(x_1) - \beta\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right) (\sigma(x_2) - \sigma(x_1)) \right\| \\ &\leq \left\| \left(\beta\left(\frac{\|x_1\|}{r}\right) - \beta\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right) \right) \sigma(x_1) \right\| + \left\| \beta\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right) (\sigma(x_2) - \sigma(x_1)) \right\|. \end{aligned}$$

Desde que $|\beta'(t)| \leq k$ entonces

$$|\beta(a) - \beta(b)| \leq k |a - b|.$$

Así,

$$\left| \beta\left(\frac{\|x_1\|}{r}\right) - \beta\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right) \right| \leq k \left| \frac{\|x_1\|}{r} - \frac{\|x_2\|}{r} \right|.$$

Luego, obtenemos

$$\begin{aligned} \|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| &\leq k \left\| \frac{\|x_1\| - \|x_2\|}{r} \right\| \frac{\epsilon}{2k}r + \frac{\epsilon}{2}\|x_1 - x_2\| \\ &= \epsilon\|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| \leq \epsilon\|x_1 - x_2\|, \quad \text{para } x_1, x_2 \in B_r.$$

Caso 2: Si $x_1 \in B_r$ y $x_2 \notin B_r$, obtenemos a partir de las mismas cuentas del Caso 1:

$$\begin{aligned} \|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| &= \|\phi(x_1)\| = \left\| \beta\left(\frac{\|x_1\|}{r}\right) \phi(x_1) - \beta\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right) \phi(x_1) + \beta\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right) \phi(x_1) \right\| \\ &\leq \left\| \left(\beta\left(\frac{\|x_1\|}{r}\right) - \beta\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right) \right) \phi(x_1) \right\| + \left\| \beta\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right) \phi(x_1) \right\|. \end{aligned}$$

Note que $\beta\left(\frac{\|x_2\|}{r}\right) = 0$, desde que $\|x_2\| \geq r$. Por lo tanto concluimos

$$\begin{aligned} \|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| &\leq k \left\| \frac{\|x_1\| - \|x_2\|}{r} \right\| \frac{\epsilon r}{2k} \\ &\leq \epsilon \frac{\|x_1 - x_2\|}{2} \\ &\leq \epsilon \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Caso 3: Finalmente, si $x_1 \notin B_r$ y $x_2 \notin B_r$, entonces $\|x_1\| \geq r$, $\|x_2\| \geq r$. Así, tenemos que:

$$\|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| = \|0 - 0\| \leq \epsilon \|x_1 - x_2\|.$$

Lo que concluye la prueba del Lema. ■

Observación 3.1. Si E es un espacio de Hilbert(espacio de Banach cuya norma proviene de un producto interno), entonces la aplicación ϕ es de clase C^k . En tal contexto, la norma es C^∞ , excepto en el origen, pero en torno al origen la función β es constante, implicando que $\beta \circ \|\cdot\|$ sea C^∞ , por consiguiente ϕ tiene la misma clase de diferenciabilidad que f .

Teorema 3.3 (Grobman-Hartman para difeomorfismos [Gro59], [Har60a], [Pal68], [Nit71]).

Sea E un espacio de Banach y V una vecindad del punto 0 en E y sea $f : V \rightarrow E$ un difeomorfismo de clase C^k , $k \geq 1$ donde 0 es un punto fijo hiperbólico de f . Entonces, existe una vecindad U de 0 y un homeomorfismo $h : U \rightarrow h(U)$ tal que $h(U)$ es una vecindad de 0 en E , con $h(U) \subset V$, tal que

$$h \circ L(z) = f \circ h(z), \quad \text{para } z \in U.$$

Donde $L = Df(0)$.

Demostración: Consider la siguiente función:

$$\varphi(z) = f(z) - L(z).$$

Por definición, tenemos que ,

- $\varphi(0) = 0,$
- $D\varphi(0) = Df(0) - L = 0.$

Por el Lema 3.4 tenemos que para todo $\epsilon > 0$ existe una vecindad \tilde{U} de 0, y una función $\tilde{\varphi}$ tal que

$$\tilde{\varphi} : E \rightarrow E,$$

con $Lip(\tilde{\varphi}) < \epsilon$ de modo que

$$\tilde{\varphi}|_{\tilde{U}} = \varphi|_{\tilde{U}}.$$

Defina la función

$$\tilde{f} := L + \tilde{\varphi}.$$

Por definición, se tiene que

$$\tilde{f}|_{\tilde{U}} = f|_{\tilde{U}}.$$

Por el Teorema 3.2 existe un $\tilde{h} : E \rightarrow E$ tal que

$$\tilde{h} \circ L = \tilde{f} \circ \tilde{h}.$$

Finalmente, si definimos

$$h = \tilde{h}|_{\tilde{U}},$$

se tiene que

$$h \circ L = f \circ h.$$

Lo cual prueba el Teorema de Grobman-Hartman. ■

Observación 3.2. Si en el Teorema de Grobman-Hartman consideramos un punto fijo de f con $a \neq 0$, podemos hacer una translación y llevarlo al origen. En efecto, considere $T : E \rightarrow E$, $T(x) = x + a$ y sea $g = T^{-1}fT$, entonces g satisface las condiciones del Teorema 3.3. Así, si k es tal que $kL = gk$, localmente, donde $L = Df(a)$. Lo que nos lleva a $\underbrace{Tk}_h L = f \underbrace{Tk}_h$.

3.2 Contra-Ejemplos Para El Caso Discreto

El siguiente ejemplo, nos muestra que la condición de hiperbólicidad en el Teorema 3.3(Teorema Grobman-Hartman) es esencial.

Ejemplo 3.1 ([BG05]). Considera la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x^2(y^2 + 1), y)$. Entonces,

- (a) El punto $(0, 0)$ es un punto fijo que no es hiperbólico.
- (b) No existe una función lineal $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $f \circ h = h \circ A$, para algún homeomorfismo local de $(0, 0)$, h .

Demostración:

- (a) Vamos a probar que $(0, 0)$ es un punto fijo no hiperbólico.

1. Tenemos que $f(0, 0) = (0, 0)$, luego es un punto fijo.

2. Note que

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} 2x(y^2 + 1) & x^2 2y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Así

$$Df(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto tenemos que 0 y 1 son los autovalores de $Df(0, 0)$, entonces por definición el punto fijo $(0, 0)$ no es hiperbólico.

- (b) Supongamos que exista una aplicación lineal A tal que

$$f \circ h = A \circ h. \quad (3.10)$$

Sea $h = (h_1, h_2)$. De Ec.(3.10) obtenemos

$$(h_1(x, y)^2(h_2(x, y)^2 + 1), h_2(x, y)) = (h_1(A(x, y)), h_2(A(x, y))), \quad (3.11)$$

de donde

$$h_1(x, y)^2(h_2(x, y)^2 + 1) = h_1(A(x, y)). \quad (3.12)$$

y

$$h_2(x, y) = h_2(A(x, y)). \quad (3.13)$$

La Ec. (3.12) es equivalente a la ecuación

$$h_1(x, y)^2(h_2(x, y)^2 + 1) - h_1(A(x, y)) = 0. \quad (3.14)$$

Luego, haciendo las mudanzas de variables

$$h_1(x, y) = z, \quad h_2(x, y)^2 + 1 = a, \quad -h_1(A(x, y)) = c,$$

obtenemos:

$$az^2 + c = 0. \quad (3.15)$$

Desde que h_1 es una función, tenemos que $h_1(x, y)$ asume un único valor, esto quiere decir que la Ec.(3.15) tiene una única solución, esto es equivalente al discriminante ser cero, esto es, $4ac = 0$, de donde obtenemos:

$$4(h_2(x, y)^2 + 1)h_1(A(x, y)) = 0. \quad (3.16)$$

Entonces, como $h_2(x, y)^2 + 1 > 0$, tenemos que

$$h_1(A(x, y)) = 0. \quad (3.17)$$

Substituyendo Ec. (3.17) en Ec. (3.14) nos lleva a $h_1(x, y)^2(h_2(x, y)^2 + 1) = 0$, o sea

$$h_1(x, y) = 0. \quad (3.18)$$

Note que f no es una función inyectiva, pues $f(x, 0) = (x^2, 0)$. Esto nos muestra que f no es inyectiva en una vecindad del cero. De ahí y de la Ec. (3.10) nos lleva a ver que A no es inyectiva en una vecindad del cero. Entonces, existe un punto $(a, b) \neq (0, 0)$ tal que $A(a, b) = (0, 0)$.

Así, por Ec. (3.13) tenemos que $h_2(a, b) = h_2(A(a, b)) = h(0, 0)$ y por Ec. (3.18) tenemos que $h_1(a, b) = (0, 0)$. Luego, tendríamos que $h(0, 0) = h(a, b)$, para $(a, b) \neq (0, 0)$ por tanto, h no es inyectiva, lo que no lleva a una contradicción, con el hecho que h es un homeomorfismo en una vecindad del cero. Así, concluimos el ejemplo. ■

El siguiente ejemplo nos muestra que con las hipótesis del Teorema de Grobman-Hartman 3.3, mismo siendo f una función analítica puede no existir una conjugación de clase C^1 con la parte lineal $Df(0)$.

Ejemplo 3.2 (Hartman [Har60b]). Existe una función analítica $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que $(0, 0, 0)$ es un punto fijo hiperbólico, mas no existe una conjugación de clase C^1 con su parte lineal $Df(0, 0, 0)$, esto es, no existe un difeomorfismo h de clase C^1 entre dos vecindades del origen tal que, $h(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$ y

$$h \circ f = Df(0, 0, 0) \circ h.$$

Demostración: Considere la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto f(x, y, z) = (f_1, f_2, f_3), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= ax, \\ f_2(x, y, z) &= ac(y + \epsilon xz), \\ f_3(x, y, z) &= cz, \end{aligned} \tag{3.19}$$

con $a = e^\alpha$, $c = e^{-\gamma}$ y $\epsilon \neq 0$. Note que

$$a > 1 > c > 0 \quad \text{y} \quad ac > 1. \tag{3.20}$$

Por definición tenemos que

$$Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ ac(\epsilon z) & ac & ac\epsilon x \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix},$$

de modo que

$$Df(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Luego por (3.20) tenemos que $(0, 0, 0)$ es un punto fijo hiperbólico de f .

La prueba de la no existencia de una conjugación de clase C^1 será hecha por el método del absurdo, vamos a suponer que f tenga una conjugación de clase C^1 , esto quiere decir que, existe un difeomorfismo h de modo que

$$f \circ h^{-1} = h^{-1} \circ Df(0, 0, 0).$$

Sea $h^{-1} = (h_1^{-1}, h_2^{-1}, h_3^{-1})$. Ahora el objetivo es mostrar que la derivada parcial

$$\frac{\partial h_2^{-1}(0, 0, w)}{\partial u} \quad \text{no existe para todo } w \neq 0$$

o

$$\frac{\partial h_2^{-1}(u, 0, 0)}{\partial w} \quad \text{no existe para todo } u \neq 0.$$

Las cuentas que vamos hacer a seguir son para $v = 0$ y $(\|u\|, \|w\|)$ suficientemente pequeños. Para simplificar la notación, para cualquier función J vamos a usar la notación

$$J(u, w) := J(u, 0, w).$$

Ahora por hipótesis tenemos que $h^{-1} \circ Df(0, 0, 0) = f \circ h^{-1}$. De donde obtenemos,

$$(h_1^{-1}(au, acv, cw), h_2^{-1}(au, acv, cw), h_3^{-1}(au, acv, cw)) = (ah_1^{-1}, ac(h_2^{-1} + \epsilon h_2^{-1} h_3^{-1}), ch_3^{-1}).$$

Entonces, si $v = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} ah_1^{-1} &= h_1^{-1}(au, cw), \\ ac(h_2^{-1} + \epsilon h_2^{-1} h_3^{-1}) &= h_2^{-1}(au, cw), \\ ch_3^{-1} &= h_3^{-1}(au, cw). \end{aligned}$$

Así, por inducción obtenemos que

$$a^n h_1^{-1} = h_1^{-1}(a^n u, c^n w). \quad (3.21)$$

$$a^n c^n (h_2^{-1} + n\epsilon h_1^{-1} h_3^{-1}) = h_2^{-1}(a^n u, c^n w). \quad (3.22)$$

$$c^n h_3^{-1} = h_3^{-1}(a^n u, c^n w). \quad (3.23)$$

Para $\|u\|, \|w\|$ pequeños, por Ec. (3.21) tenemos que

$$\begin{aligned} h_1^{-1}(0, w) &= a^{-n} h_1^{-1}(0, c^n w) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} h_1^{-1}(0, w) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a^{-n} h_1^{-1}(0, c^n w) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$h_1^{-1}(0, w) \equiv 0. \quad (3.24)$$

De ahí, usando Ec. (3.22) y $ac > 1$, obtenemos de forma similar al paso anterior que

$$h_2^{-1}(0, w) = 0. \quad (3.25)$$

Ahora, usando la mudanza de variable u por u/a^n en la Ec. (3.23) obtenemos

$$c^n h_3^{-1} \left(\frac{u}{a^n}, 0 \right) = h_3^{-1}(u, 0).$$

Haciendo $n \rightarrow \infty$ en la ecuación anterior, obtenemos

$$h_3^{-1}(u, 0) = 0 \quad (3.26)$$

Seguidamente, multiplicando Ec. (3.22) por c^{-n} , usando el cambio de variable u por u/a^n , y usando Ec. (3.21) para obtener

$$a^n h_2^{-1}(u/a^n, w) + n \epsilon h_1^{-1}(u, c^n w) h_3^{-1}(u/a^n, w) = c^{-n} h_2^{-1}(u, c^n w). \quad (3.27)$$

Ahora, supongamos que existan

$$\frac{\partial h_2^{-1}(0, w)}{\partial u} \quad \text{y} \quad \frac{\partial h_2^{-1}(u, 0)}{\partial w}. \quad (3.28)$$

Entonces

$$\frac{\partial h_2^{-1}(0, w)}{\partial u} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_2^{-1}((0, w) + t(u, 0)) - h_2^{-1}(0, w)}{t}.$$

Desde que $h_2^{-1}(0, w) = 0$, entonces

$$\frac{\partial h_2^{-1}(0, w)}{\partial u} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_2^{-1}(tu, w)}{t}.$$

Desde que $a > 1$, entonces $x_n = (\frac{1}{a})^n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, luego por la caracterización del límite por sucesiones tenemos que:

$$\frac{\partial h_2^{-1}(0, w)}{\partial u} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_2^{-1}\left(\frac{u}{a^n}, w\right)}{\frac{1}{a^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n h_2^{-1}\left(\frac{u}{a^n}, w\right). \quad (3.29)$$

Haciendo $w = 0$ en Ec. (3.27), obtenemos

$$a^n c^n \left(h_2^{-1}\left(\frac{u}{a^n}, 0\right) + n \epsilon h_1^{-1}(u, 0) h_3^{-1}\left(\frac{u}{a^n}, 0\right) \right) = h_2^{-1}(a^n u, 0). \quad (3.30)$$

Por Ec. (3.26)

$$h_1^{-1}(u, 0) h_3^{-1}\left(\frac{u}{a^n}, 0\right) = 0.$$

De ahí y usando Ec. (3.30), llegamos a que

$$a^n \left(h_2^{-1}\left(\frac{u}{a^n}, 0\right) \right) = c^{-n} h_2^{-1}(u, 0). \quad (3.31)$$

Por Ec. (3.29), en el caso $w = 0$, deducimos que

$$\frac{\partial h_2^{-1}(0, 0)}{\partial u} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^n h_2^{-1}\left(\frac{u}{a^n}, 0\right).$$

De ahí y usando Ec. (3.31) obtenemos

$$\frac{\partial h_2^{-1}(0, 0)}{\partial u} = \lim_{n \rightarrow \infty} c^{-n} h_2^{-1}(u, 0). \quad (3.32)$$

Luego, usando la ecuación anterior llegamos a que

$$\begin{aligned} h_2^{-1}(u, 0) &= h_2^{-1}(u, 0) c^{-n} c^n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} h_2^{-1}(u, 0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (h_2^{-1}(u, 0) c^{-n}) \lim_{n \rightarrow \infty} c^n \\ h_2^{-1}(u, 0) &= \frac{\partial h_2^{-1}(0, 0)}{\partial u} \lim_{n \rightarrow \infty} c^n. \end{aligned}$$

Lo que prueba que

$$h_2^{-1}(u, 0) = 0. \quad (3.33)$$

Por último asumiendo que

$$\frac{\partial h_2^{-1}(u, 0)}{\partial w} \text{ existe,}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_2^{-1}(u, 0)}{\partial w} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_2^{-1}((u, 0) + t(0, w)) - h_2^{-1}(u, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h_2^{-1}((u, 0) + t(0, w))}{t} \quad (\text{por Ec. (3.33)}). \end{aligned}$$

Desde que $c < 1$, entonces $x_n = c^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, luego por la caracterización del límite por sucesiones tenemos que

$$\frac{\partial h_2^{-1}(u, 0)}{\partial w} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_2^{-1}(u, c^n w)}{c^n}. \quad (3.34)$$

De Ec. (3.27)

$$\frac{1}{n} a^n h_2^{-1}(u/a^n, w) + \epsilon h_1^{-1}(u, c^n w) h_3^{-1}(u/a^n, w) = \frac{1}{n} c^{-n} h_2^{-1}(u, c^n w).$$

Entonces,

$$\frac{1}{n} a^n h_2^{-1}(u/a^n, w) + \epsilon h_1^{-1}(u, c^n w) h_3^{-1}(u/a^n, w) = \frac{1}{n} c^{-n} h_2^{-1}(u, c^n w). \quad (3.35)$$

Por tanto, haciendo $n \rightarrow \infty$ y usando las Ecs. (3.32) y (3.34) deducimos que

$$\epsilon h_1^{-1}(u, 0) h_3^{-1}(0, w) = 0.$$

Lo cual es imposible para $uw \neq 0$. Pues, por ejemplo si $h_1^{-1}(u, 0) = 0$ y $u \neq 0$, entonces por Ec. (3.22) obtenemos

$$h_2^{-1}(u, 0) = 0,$$

y por Ec. (3.26) tenemos que

$$h_3^{-1}(u, 0) = 0,$$

de donde llegamos a que

$$h_1^{-1} = h_2^{-1} = h_3^{-1} = 0,$$

para $(u, 0, 0) \neq (0, 0, 0)$ lo que contradice el hecho que h^{-1} es inyectiva.

Si $h_3^{-1}(0, w) = 0$ y juntando las Ecs. (3.24) y (3.25), obtenemos que

$$h_1^{-1} = h_2^{-1} = h_3^{-1} = 0,$$

cuando $(0, 0, w) \neq (0, 0, 0)$ lo que contradice el hecho de que h^{-1} es inyectiva. Luego, esa contradicción viene del hecho de asumir la existencia de una conjugación C^1 . Por lo tanto, no existe una h de clase C^1 que linealice la función f en una vecindad del punto fijo hiperbólico $(0, 0, 0)$. Lo que concluye el ejemplo. ■

Teorema de Linealización C^α -Hölder

Grobman-Hartman

En esta sección probaremos el Teorema de Linealización C^α -Hölder Grobman-Hartman para difeomorfismos. Para tal fin, vamos a usar de manera próxima el artículo de Belitski-Rayskin [BR11].

4.1 Enunciado del Teorema

Sea E un espacio de Banach. Un homeomorfismo local $\Phi : (E, 0) \longrightarrow (E, 0)$ es llamado α -Hölder si

$$\|\Phi(x') - \Phi(x'')\| \leq C \|x' - x''\|^\alpha$$

y

$$\|\Phi^{-1}(x') - \Phi^{-1}(x'')\| \leq C \|x' - x''\|^\alpha$$

en una vecindad del origen.

Sea $\Lambda : E \longrightarrow E$ una aplicación lineal hiperbólica. Entonces por el Lema 3.2, existe una norma equivalente, $\|\cdot\|_2$, sobre E y una descomposición directa de E satisfaciendo

$$(1) \ E = E_- \oplus E_+$$

$$(2) \ \Lambda(E_-) = E_- \text{ y } \Lambda(E_+) = E_+$$

$$(3) \ \text{Sean } \Lambda_- := \Lambda|_{E_-} : E_- \rightarrow E_- \text{ y } \Lambda_+ := \Lambda|_{E_+} : E_+ \rightarrow E_+. \text{ Entonces se tiene que } \Lambda_- \text{ es una contracción } \|\Lambda_-\|_2 = \lambda < 1 \text{ y si } v \in E_- \text{ implica } \|\Lambda(v)\|_2 \leq \lambda \|v\|_2.$$

También se tiene que Λ_- es una expansión $\|\Lambda|_{E_+}\|_2 = \frac{1}{\lambda} > 1$ y si $v \in E_+$ implica $\|\Lambda(v)\|_2 \geq \frac{1}{\lambda}\|v\|_2$.

Vamos a denotar por $r(\Lambda)$ el radio espectral de la aplicación Λ . Además denotamos

$$\alpha_0(\Lambda) := \min \left(-\frac{\ln r(\Lambda_-)}{\ln r(\Lambda^{-1})}, -\frac{\ln r(\Lambda_+^{-1})}{\ln r(\Lambda)} \right). \quad (4.1)$$

Vamos asumir

$$\alpha_0(\Lambda) := -\frac{\ln r(\Lambda)}{\ln r(\Lambda^{-1})}. \quad (4.2)$$

Si Λ es una contracción, esto es $E_- = E$, y

$$\alpha_0(\Lambda) := -\frac{\ln r(\Lambda^{-1})}{\ln r(\Lambda)}. \quad (4.3)$$

Si Λ es una expansión, esto es $E_+ = E$. En cualquier caso $\alpha_0(\Lambda) \in (0, 1]$.

Teorema 4.1 (Teorema de Linealización C^α -Hölder Grobman-Hartman). *Consideremos un difeomorfismo $F(x) = \Lambda x + f(x)$, local en E tal que $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ con punto fijo hiperbólico en el punto cero. Entonces, para cualquier $\alpha < \alpha_0(\Lambda)$, existe un α -Hölder homeomorfismo local $h : (U, 0) \rightarrow (h(U), 0)$, tal que*

$$h \circ \Lambda(z) = F \circ h(z), \quad \text{para } z \in U.$$

4.2 Lema Principal-Belitski-Rayskin [BR11]

Sea

$$E = E_1 \oplus \dots \oplus E_n$$

una descomposición en suma directa.

Considere el sistema de ecuaciones

$$\varphi_i(x) = \Lambda_i \varphi_i(G_i(x)) + h_i(x, \varphi(H_i x)), \quad (4.4)$$

para $i = 1, 2, \dots, n$.

Donde $\Lambda_i : E_i \rightarrow E_i$ es una transformación lineal, mientras que $G_i, H_i : E \rightarrow E$ son funciones satisfaciendo las condiciones de Lipschitz

$$\|G_i(x') - G_i(x'')\| \leq L_i \|x' - x''\| \quad (4.5)$$

y

$$\|H_i(x') - H_i(x'')\| \leq L\|x' - x''\|. \quad (4.6)$$

También, vamos a considerar que las funciones h_i son “pequeñas” en el siguiente sentido

$$\sup_i \|h_i(u)\| \leq \delta, \quad (4.7)$$

$$\|h_i(u') - h_i(u'')\| \leq \delta\|u' - u''\|, \quad (4.8)$$

para todo $u, u', u'' \in E \times E$.

Vamos considerar la Ec.(4.4) como un sistema con respecto a las aplicaciones

$$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n),$$

con $\varphi_i : E \mapsto E_i$, para $i = 1, 2, \dots, n$.

Lema 4.1. [Lema Principal-Belitski-Rayskin [BR11]] Asumamos que

$$\max_i \|\Lambda_i\|_i + \delta < 1 \quad (4.9)$$

y

$$\max_i \|\Lambda_i\| L_i^\alpha + \delta L^\alpha < 1. \quad (4.10)$$

Entonces la Ec. (4.4) tiene una única solución $\phi : E \mapsto E$ α -Hölder.

Demostración:

Considere la función $T : C_b^0(E) \mapsto C_b^0(E)$, definido como en Ec. (4.4), esto es

$$(T\varphi)_i = \Lambda_i \varphi_i(G_i(x)) + h_i(x, \varphi(H_i x)) \quad , i = 1, \dots, n.$$

Recordemos que $C_b^0(E)$ esta unida de la norma

$$\|\varphi\| = \sup_x \|\varphi(x)\|. \quad (4.11)$$

A continuación, verificaremos que

$$\|T(\varphi) - T(\psi)\| \leq (\max_i \|\Lambda_i\|_i + \delta) \|\varphi - \psi\|. \quad (4.12)$$

Para probar esta afirmación, note que,

$$T(\varphi) = (\Lambda_1 \varphi_1(G_1 x) + h_1(x, \varphi(H_1 x)), \dots, \Lambda_n(G_n x) + h_n(x, \varphi(H_n x))).$$

y

$$T(\psi) = (\Lambda_1\psi_1(G_1x) + h_1(x, \psi(H_1x)), \dots, \Lambda_n(G_nx) + h_n(x, \psi(H_nx))).$$

De ahí, y usando la linealidad de las aplicaciones Λ_i resulta

$$\begin{aligned} T(\varphi) - T(\psi) &= (\Lambda_1(\varphi_1(G_1x) - \psi_1(G_1x)), \dots, \Lambda_n(\varphi_n(G_nx) - \psi_n(G_nx)) \\ &\quad + (h_1(x, \varphi(H_1x)) - h_1(x, \psi(H_1x)), \dots, h_n(x, \varphi(H_nx)) - h_n(x, \psi(H_nx))). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Ahora, utilizando la Ec. (4.13) y la desigualdad triangular, obtenemos

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)\| &\leq \|(\Lambda_1(\varphi_1(G_1x) - \psi_1(G_1x)), \dots, \Lambda_n(\varphi_n(G_nx) - \psi_n(G_nx)))\| + \\ &\quad \|(h_1(x, \varphi(H_1x)) - h_1(x, \psi(H_1x)), \dots, h_n(x, \varphi(H_nx)) - h_n(x, \psi(H_nx)))\|. \end{aligned}$$

De aquí, y usando definición de norma en el espacio E ,

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)\| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|(\Lambda_i(\varphi_i(G_ix) - \psi_i(G_ix)))\| + \\ &\quad \max_{1 \leq i \leq n} \|(h_i(x, \varphi(H_ix)) - h_i(x, \psi(H_ix)))\|, \end{aligned}$$

luego, usando la propiedad de la norma de las aplicaciones lineales y las condiciones (4.8) obtenemos

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)\| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| \|\varphi_i(G_ix) - \psi_i(G_ix)\| + \max_{1 \leq i \leq n} \delta \|\varphi(H_ix) - \psi(H_ix)\| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| \|\varphi - \psi\| + \max_{1 \leq i \leq n} \delta \|\varphi - \psi\|. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)\| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| \|\varphi(G_ix) - \psi(G_ix)\| + \max_{1 \leq i \leq n} \delta \|\varphi(H_ix) - \psi(H_ix)\| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| \|\varphi - \psi\| + \max_{1 \leq i \leq n} \delta \|\varphi - \psi\|. \end{aligned}$$

Por tanto, probamos la afirmación

$$\|T(\varphi) - T(\psi)\| \leq (\max_i \|\Lambda_i\| + \delta) \|\varphi - \psi\|. \quad (4.14)$$

Por consiguiente, teniendo en cuenta la condición (4.9) tenemos que T es una contracción en $C_b^0(E)$, entonces pelo o Teorema 2.1 (Teorema del Punto Fijo para Contracciones), tenemos que la Ec. (4.4) tiene una única solución $\phi \in C_b^0(E)$.

A continuación, vamos a probar que ϕ es α -Hölder. Por la Observación 2.4 tenemos que $K(M)$ es un subconjunto cerrado de las aplicaciones $\varphi \in C_b^0(E)$, satisfaciendo

$$\|\varphi(x') - \varphi(x'')\| \leq M\|x' - x''\|^\alpha, \quad (4.15)$$

donde

$$M > \frac{2\delta}{1 - \delta L^\alpha - \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\|}. \quad (4.16)$$

Ahora, vamos a verificar que $K(M)$ es invariante por la aplicación T .

En efecto, de forma análoga a los cálculos anteriores obtenemos,

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(x') - T(\varphi)(x'')\| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| \|\varphi(G_i(x')) - \varphi(G_i(x''))\| \\ &\quad + \max_{1 \leq i \leq n} \|h_i(x', \varphi(H_i x')) - h_i(x'', \varphi(H_i x''))\|. \end{aligned}$$

De donde, dado que φ es α -Hölder (4.15) y h_i satisfaz (4.7), resulta que

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(x') - T(\varphi)(x'')\| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| M \|G_i(x') - G_i(x'')\|^\alpha \\ &\quad + \max_{1 \leq i \leq n} \|h_i(x', \varphi(H_i x')) - h_i(x'', \varphi(H_i x''))\|. \end{aligned}$$

Desde que las funciones G_i son Lipschitzianas (Condición (4.5)), tenemos

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(x') - T(\varphi)(x'')\| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| M L_i^\alpha \|x' - x''\|^\alpha \\ &\quad + \max_{1 \leq i \leq n} \|h_i(x', \varphi(H_i x')) - h_i(x'', \varphi(H_i x''))\|. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Si asumimos $\|x' - x''\| \geq 1$, entonces usamos la desigualdad triangular, la condición (4.7) y, la Ec. (4.17) deducimos que

$$\|T(\varphi)(x') - T(\varphi)(x'')\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} (\|\Lambda_i\| L_i^\alpha M + 2\delta) \|x' - x''\|^\alpha. \quad (4.18)$$

Ahora, vamos asumir que $\|x' - x''\| \leq 1$. Primero note que si usamos la condición (4.48) y Ec. (4.17), se obtiene

$$\|T(\varphi)(x') - T(\varphi)(x'')\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| M L_i^\alpha \|x' - x''\|^\alpha + \max_{1 \leq i \leq n} \delta \|(x' - x'', \varphi(H_i x') - \varphi(H_i x''))\|.$$

Así

$$\|T(\varphi)(x') - T(\varphi)(x'')\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| M L_i^\alpha \|x' - x''\|^\alpha + \|x' - x''\| + \max_{1 \leq i \leq n} \delta \|\varphi(H_i x') - \varphi(H_i x'')\|.$$

Luego, usando el hecho que φ es α -Hölder y la condición, (4.6), se tiene que

$$\begin{aligned} \|T(\varphi)(x') - T(\varphi)(x'')\| &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| M L_i^\alpha \|x' - x''\|^\alpha \\ &\quad + \|x' - x''\| + \max_{1 \leq i \leq n} \delta M \|H_i(x') - H_i(x'')\|^\alpha. \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| M L_i^\alpha \|x' - x''\|^\alpha \\ &\quad + \|x' - x''\| + \delta M L^\alpha \|x' - x''\|^\alpha. \end{aligned}$$

De ahí y usando el hecho que $\|x' - x''\| \leq 1$ implica que $\|x' - x''\| \leq \|x' - x''\|^\alpha$, obtenemos que

$$\|T(\varphi)(x') - T(\varphi)(x'')\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| M L_i^\alpha \|x' - x''\|^\alpha + \delta \|x' - x''\|^\alpha + \delta M L^\alpha \|x' - x''\|^\alpha.$$

Luego,

$$\|T(\varphi)(x') - T(\varphi)(x'')\| \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \|\Lambda_i\| M L_i^\alpha + \delta + \delta M L^\alpha \right) \|x' - x''\|^\alpha.$$

Consecuentemente, por Ecs. (4.16), (4.18) y (4.6), se tiene que

$$\varphi \in K(M) \Rightarrow T(\varphi) \in K(M) \quad (4.19)$$

Por último, vamos a verificar que la única solución de la Ec. (4.4) ϕ es α -Hölder, esto es, vamos probar que $\phi \in K(M)$.

Para esto, sea $\varphi \in K(M)$, entonces $T^n(\varphi) \in K(M)$. Luego, por el teorema del punto fijo para contracciones tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(\varphi)$ converge para el punto fijo ϕ , esto es,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(\varphi) = \phi. \quad (4.20)$$

Esto quiere decir que $\phi \in \overline{K(M)}$. Esto implica que $\phi \in K(M)$, puesto que $K(M)$ es cerrado ($\overline{K(M)} = K(M)$).

Lo que termina la prueba del Lema principal. ■

4.3 Prueba del Teorema Principal 4.1

En esta sección daremos la prueba de nuestro Teorema Principal 4.1 (**Teorema de Linealización C^α -Holder Grobman-Hartman**).

Lema 4.2. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha < \alpha_0(\Lambda)$, entonces existe una norma $\|\cdot\|$ en E la cual es equivalente a la norma original, tal que

$$\max\{\|\Lambda_-\| \cdot \|\Lambda^{-1}\|^\alpha, \|\Lambda_+^{-1}\| \cdot \|\Lambda\|^\alpha\} < 1.$$

Demostración: Desde que $\alpha_0(\Lambda) = \min\left(-\frac{\ln r(\Lambda_-)}{\ln r(\Lambda^{-1})}, -\frac{\ln r(\Lambda_+^{-1})}{\ln r(\Lambda)}\right)$. Entonces,

$$\alpha < -\frac{\ln r(\Lambda_-)}{\ln r(\Lambda^{-1})} \quad \text{y} \quad \alpha < -\frac{\ln r(\Lambda_+^{-1})}{\ln r(\Lambda)}.$$

De aquí, y aplicando la propiedades de logaritmo obtenemos que

$$r(\Lambda^{-1})^\alpha r(\Lambda_-) < 1$$

y

$$r(\Lambda)^\alpha r(\Lambda_+^{-1}) < 1$$

De aquí, podemos encontrar un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$(r(\Lambda^{-1}) + \epsilon)^\alpha (r(\Lambda_-) + \epsilon) < 1 \tag{4.21}$$

y

$$(r(\Lambda) + \epsilon)^\alpha (r(\Lambda_+^{-1}) + \epsilon) < 1. \tag{4.22}$$

Combinando los Teoremas 2.10 y 2.9, obtenemos para el $\epsilon > 0$ arriba y para Λ , $E = E_- \oplus E_+$, $\Lambda_- : E_- \rightarrow E_-$ y $\Lambda_+ : E_+ \rightarrow E_+$ existe una norma adaptada $\|\cdot\|_\epsilon$ tal que

$$\begin{aligned} \|\Lambda_-\|_\epsilon &\leq r(\Lambda_-) + \epsilon, & \|\Lambda_-^{-1}\|_\epsilon &\leq r(\Lambda_-^{-1}) + \epsilon, \\ \|\Lambda_+\|_\epsilon &\leq r(\Lambda_+) + \epsilon, & \|\Lambda_+^{-1}\|_\epsilon &\leq r(\Lambda_+^{-1}) + \epsilon, \\ \|\Lambda\|_\epsilon &\leq r(\Lambda) + \epsilon, & \|\Lambda^{-1}\|_\epsilon &\leq r(\Lambda^{-1}) + \epsilon. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Si hacemos $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\epsilon$, entonces de las Ecs. (4.22) y (4.23) obtenemos

$$\max\{\|\Lambda_-\| \cdot \|\Lambda^{-1}\|^\alpha, \|\Lambda_+^{-1}\| \cdot \|\Lambda\|^\alpha\} < 1.$$

■

A seguir probaremos el Teorema Principal 4.1, cuyo enunciado es el siguiente.

Teorema: Consideremos un difeomorfismo $F(x) = \Lambda x + f(x)$, local en E tal que $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ con punto fijo hiperbólico en el punto cero. Entonces, para cualquier $\alpha < \alpha_0(\Lambda)$, existe un α -Hölder homeomorfismo local $h : (U, 0) \longrightarrow (h(U), 0)$, tal que

$$h \circ \Lambda(z) = F \circ h(z), \quad \text{para } z \in U.$$

Demostración: Por el Lema 3.4, tenemos que, dado $\delta > 0$, podemos asumir que $\tilde{F} : E \rightarrow E$ es un homeomorfismo tal que \tilde{F} y F coinciden en una vecindad del origen y tal que las funciones

$$f(x) = \tilde{F}(x) - \Lambda x, \quad (4.24)$$

$$f_1(x) = \tilde{F}^{-1}(x) - \Lambda^{-1}x, \quad (4.25)$$

son Lipschitzianas con constante de Lipschitz menor que δ . Vamos a suprimir la tilde para simplificar la notación.

Queremos encontrar una conjugación $\Phi(x) = x + \varphi(x)$ entre F y Λ que sea un homeomorfismo α -Hölder. Para este fin, comenzaremos probando la siguiente afirmación.

Afirmación 1: Existe una aplicación $\Phi(x) = x + \varphi(x)$ α -Hölder que satisface

$$\begin{aligned} \Lambda \circ \Phi(x) &= \Phi \circ F(x) \\ \Lambda \circ (I + \varphi)(x) &= (I + \varphi) \circ F(x) \\ \Lambda(x) + \Lambda \circ \varphi(x) &= F(x) + \varphi \circ F(x). \end{aligned}$$

De donde, deducimos que,

$$\varphi(Fx) = \Lambda\varphi(x) - f(x). \quad (4.26)$$

Luego, teniendo en cuenta la descomposición $E = E_- \oplus E_+$, la invariancia de las aplicaciones lineales $\Lambda_{\mp} = \Lambda|_{E_{\mp}}$, se deduce que

$$\varphi_+(Fx) + \varphi_-(Fx) = \Lambda\varphi_+(x) + \Lambda\varphi_-(x) - f_-(x) - f_+(x)$$

de donde resulta que

$$\varphi_-(Fx) = \Lambda_-\varphi_-(x) - f_-(x).$$

y

$$\varphi_+(Fx) = \Lambda_+\varphi_+(x) - f_+(x).$$

Lo que implica que la Ec. (4.26) es equivalente al sistema

$$\varphi_-(x) = \underbrace{\Lambda_-}_{\Lambda_1} \varphi_-(F^{-1}x) - f_-(F^{-1}x). \quad (4.27)$$

y

$$\varphi_+(x) = \underbrace{\Lambda_+^{-1}}_{\Lambda_2} \varphi_+(Fx) + \Lambda_+^{-1} f_+(x) \quad (4.28)$$

Aquí $f_{\mp} : E \rightarrow E_{\mp}$, $f = (f_-, f_+)$ y $\varphi_{\mp} : E \rightarrow E_{\mp}$. De acuerdo con ello, buscamos una solución $\varphi = (\varphi_-, \varphi_+)$.

Afirmación 1.1: Existe la función φ y α -Hölder.

Para probar esta afirmación vamos hacer uso del Lema 4.1, considerando para esto las siguientes funciones

$$G_1(x) = F^{-1}(x); G_2(x) = F(x); h_1(x, y) = f_-(F^{-1}(x)); h_2(x, y) = \Lambda_+^{-1} f_+(x),$$

$$H_1(x, y) = H_2(x, y) = 0.$$

Ahora vamos a verificar que estas funciones satisfacen las condiciones del Lema 4.1. En efecto, por el Lema 4.2 podemos tomar una norma en E la cual es equivalente a la norma original, tal que

$$\max\{\|\Lambda_-\| \cdot \|\Lambda^{-1}\|^\alpha, \|\Lambda_+^{-1}\| \cdot \|\Lambda\|^\alpha\} < 1. \quad (4.29)$$

Además, por el Lema 3.4, dado $\delta > 0$, tenemos que

$$Lip(f) \leq \delta. \quad (4.30)$$

Así

$$Lip(F) \leq (\|\Lambda\| + \delta).$$

Esto quiere decir que para un $\delta > 0$ suficientemente pequeño tenemos que

$$Lip(F) \approx \|\Lambda\|. \quad (4.31)$$

Por el Lema 3.1, para un $\delta > 0$ suficientemente pequeño tenemos que

$$Lip(F^{-1}) < \left(\frac{\|\Lambda^{-1}\|}{1 - \delta \|\Lambda^{-1}\|} \right).$$

Así, si tomamos un $\delta > 0$ bien cerca de cero, tenemos que

$$\text{Lip}(F^{-1}) \approx \|\Lambda^{-1}\|. \quad (4.32)$$

Luego, por la Ec. (4.32) tenemos que

$$\begin{aligned} \|G_1(x) - G_1(x')\| &\leq \|F^{-1}(x) - F^{-1}(x')\| \\ &\leq \underbrace{\|\Lambda^{-1}\|}_{L_1} \|x - x'\|. \end{aligned}$$

Ahora, por la Ec. (4.31) tenemos que

$$\begin{aligned} \|G_2(x) - G_2(x')\| &\leq \|F(x) - F(x')\| \\ &\leq \underbrace{\|\Lambda\|}_{L_2} \|x - x'\|. \end{aligned}$$

En seguida, por Ec. (4.30) y Ec. (4.32) obtenemos

$$\begin{aligned} \|h_1(x, y) - h_1(x', y')\| &= \|f_-(F^{-1}(x)) - f_-(F^{-1}(x'))\| \\ &\leq \delta \|F^{-1}(x) - F^{-1}(x')\| \\ &\leq \delta \|\Lambda^{-1}\| \|x - x'\| \\ &\leq \delta \|\Lambda^{-1}\| \|(x - x', y - y')\|. \end{aligned}$$

También tenemos, por Ec. (4.30) y Ec. (4.32) lo siguiente

$$\begin{aligned} \|h_2(x, y) - h_2(x', y')\| &= \|\Lambda_+^{-1} f_+(x) - \Lambda_+^{-1} f_+(x')\| \\ &\leq \|\Lambda_+^{-1}\| \|f_+(x) - f_+(x')\| \\ &\leq \delta \|\Lambda_+^{-1}\| \|x - x'\| \\ &\leq \delta \|\Lambda_+^{-1}\| \|(x - x', y - y')\|. \end{aligned}$$

Por el Lema (3.4) tenemos que

$$\sup \|h_1(x, y)\| \leq \delta \quad y \quad \sup \|h_2(x, y)\| \leq \delta \|\Lambda_+^{-1}\| \leq \delta.$$

Luego, combinando las ecuaciones anteriores, para un $\delta > 0$ suficientemente pequeño, tenemos que

$$\max\{\|\Lambda_1\|, \|\Lambda_2\|\} + \delta < 1.$$

y

$$\max\{\|\Lambda_1\|L_1^\alpha, \|\Lambda_2\|L_2^\alpha\} + \delta L^\alpha < 1.$$

Por tanto, por el Lema 4.1, el sistema (4.27) y (4.28) tiene una única solución acotada φ que es α -Hölder. Lo que prueba la Afirmación 1.1.

Luego tenemos probado la Afirmación 1. Esto quiere decir que encontramos una función $\Phi(x) = x + \varphi(x)$ que es α -Hölder y satisface

$$\Phi(Fx) = \Lambda\Phi(x).$$

Afirmación 2: La función Φ es un α -Hölder homeomorfismo.

Para este fin, vamos a encontrar una aplicación $\Psi(x) = x + \psi(x)$ que satisfaga

$$F(\Psi(x)) = \Psi(\Lambda x). \quad (4.33)$$

Desde que $\Psi(x) = x + \psi(x)$, entonces

$$\begin{aligned} F(x + \psi(x)) &= (I + \psi)(\Lambda(x)) \\ (f + \Lambda)(x + \psi(x)) &= \Lambda(x) + \psi(\Lambda x). \end{aligned}$$

Esto implica,

$$f(x + \psi(x)) + \Lambda(x + \psi(x)) = \Lambda(x) + \psi(\Lambda x).$$

Lo que nos lleva a

$$\psi_+(\Lambda x) = f_+(x + \psi(x)) + \Lambda_+(\psi_+(x)), \quad (4.34)$$

y

$$\psi_-(\Lambda x) = f_-(x + \psi(x)) + \Lambda_-(\psi_-(x)). \quad (4.35)$$

Así, de Ec. (4.34) obtenemos

$$\psi_+(x) = \underbrace{\Lambda_+^{-1}(\psi_+(x))}_{\Lambda_1} - \Lambda_+^{-1}f_+(x + \psi(x)), \quad (4.36)$$

y de Ec. (4.35) obtenemos

$$\psi_-(x) = \underbrace{\Lambda_-^{-1}(\psi_-(\Lambda^{-1}x))}_{\Lambda_2} + f_-(\Lambda^{-1}x + \psi(\Lambda^{-1}(x))). \quad (4.37)$$

Afirmación 2.1: La función ψ es α -Hölder.

Para probar esta afirmación vamos hacer uso del Lema 4.1, considerando para esto las siguientes funciones

$$\begin{aligned} G_1(x) &= x; G_2(x) = \Lambda^{-1}(x); & h_1(x, y) &= -\Lambda_+^{-1}f_+(x + y); \\ h_2(x, y) &= f_-(\Lambda^{-1}x + y); & H_1(x) &= x; H_2(x) = \Lambda^{-1}(x). \end{aligned}$$

Ahora vamos a verificar que estas funciones satisfacen las condiciones del Lema 4.1. En efecto, por el Lema 4.2 podemos tomar una norma en E tal que

$$\max\{\|\Lambda_-\| \cdot \|\Lambda^{-1}\|^\alpha, \|\Lambda_+^{-1}\| \cdot \|\Lambda\|^\alpha\} < 1 \quad (4.38)$$

Además, por el Lema 3.4, dado $\delta > 0$, tenemos que

$$Lip(f) \leq \delta. \quad (4.39)$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \|G_1(x) - G_1(x')\| &\leq \|x - x'\| \\ &\leq \underbrace{1}_{L_1} \|x - x'\|. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|G_2(x) - G_2(x')\| &\leq \|\Lambda^{-1}(x - x')\| \\ &\leq \underbrace{\|\Lambda^{-1}\|}_{L_2} \|x - x'\|. \end{aligned}$$

En seguida, por Ec. (4.39) obtenemos

$$\begin{aligned} \|h_1(x, y) - h_1(x', y')\| &= \|-\Lambda_+^{-1}f_+(x + y) - (-\Lambda_+^{-1}f_+(x' + y'))\| \\ &\leq \delta \|\Lambda_+^{-1}\| \|(x - x') + (y - y')\| \\ &\leq \delta \|\Lambda_+^{-1}\| \|(x - x', y - y')\| \\ &\leq \delta \|(x - x', y - y')\|. \end{aligned}$$

También tenemos, por Ec. (4.39)

$$\begin{aligned}
\|h_2(x, y) - h_2(x', y')\| &= \|\Lambda_+^{-1}f_+(x) - \Lambda_+^{-1}f_+(x')\| \\
&\leq \delta\|\Lambda_+^{-1}\|\|f_+(x) - f_+(x')\| \\
&\leq \delta\|\Lambda_+^{-1}\|\|x - x'\| \\
&\leq \delta\|\Lambda_+^{-1}\|\|(x - x', y - y')\| \\
&\leq \delta\|(x - x', y - y')\|
\end{aligned}$$

Por el Lema (3.4) tenemos que

$$\sup\|h_1(x, y)\| \leq \delta \quad y \quad \sup\|h_2(x, y)\| \leq \delta\|\Lambda_+^{-1}\| \leq \delta.$$

También se tiene que

$$\begin{aligned}
\|H_1(x) - H_1(x')\| &\leq \|x - x'\| \\
&\leq \underbrace{\|\Lambda^{-1}\|}_L \|x - x'\|.
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\|H_2(x) - H_2(x')\| &\leq \|\Lambda^{-1}(x - x')\| \\
&\leq \underbrace{\|\Lambda^{-1}\|}_L \|x - x'\|.
\end{aligned}$$

Luego, combinando las ecuaciones anteriores, para un $\delta > 0$ suficientemente pequeño tenemos que,

$$\max\{\|\Lambda_1\|, \|\Lambda_2\|\} + \delta < 1.$$

y

$$\max\{\|\Lambda_1\|L_1^\alpha, \|\Lambda_2\|L_2^\alpha\} + \delta L^\alpha < 1.$$

Por tanto, por el Lema 4.1, el sistema (4.27) y (4.28) tiene una única solución acotada $\psi = (\psi_-, \psi_+)$ α -Hölder. Lo que prueba la Afirmación 2.1.

Afirmación 2.2: La aplicación $\Psi(x)$ es la inversa de la función Φ .

Tenemos que la aplicación $\Psi(x) = x + \psi(x)$ satisface

$$F(\Psi(x)) = \Psi(\Lambda x).$$

Además, la aplicación $H(x) = \Phi(\Psi(x))$ es α -Hölder; y la función continua acotada h satisface la ecuación

$$h(\Lambda x) = \Lambda h(x). \quad (4.40)$$

De hecho, tenemos que

$$\Phi(Fx) = \Lambda \Phi(x). \quad (4.41)$$

$$F(\Psi(x)) = \Psi(\Lambda x). \quad (4.42)$$

Así, de Ec. (4.41) obtenemos

$$\phi(F(\Psi(x))) = \Lambda \Phi(\Psi(x)). \quad (4.43)$$

De Ecs. (4.42) Y (4.43) tenemos que

$$\begin{aligned} \phi(\psi(\Lambda(x))) &= \Lambda \phi(\psi(x)) \\ (I + h)(\Lambda x) &= \Lambda(x + h(x)) \\ \Lambda x + h(\Lambda x) &= \Lambda x + \Lambda h(x). \end{aligned}$$

De donde, obtenemos que

$$h(\Lambda x) = \Lambda h(x).$$

Así, por unicidad del Lema 4.1, $h = 0$.

Similarmente, la aplicación $\tilde{H}(x) = \Psi(\Phi(x)) = x + \tilde{h}(x)$. De Ec. (4.41)

$$F(\Psi(\Phi(x))) = \Psi \Lambda(\Phi(x)). \quad (4.44)$$

De aquí y de Ec. (4.40) obtenemos que

$$F(\Psi(\Phi(x))) = \Psi \Phi(Fx). \quad (4.45)$$

De esta igualdad y de la definición de \tilde{h} obtenemos

$$F(x + \tilde{h}(x)) = F(x) + \tilde{h}(F(x)). \quad (4.46)$$

Lo que implica,

$$f(x + \tilde{h}(x)) + \Lambda(x + \tilde{h}(x)) = F(x) + \tilde{h}(F(x))$$

$$f(x + \tilde{h}(x)) + \Lambda x + \Lambda \tilde{h}(x) = f(x) + \Lambda x + \tilde{h}(F(x)). \quad (4.47)$$

De donde obtenemos

$$f_+(x + \tilde{h}(x)) + \Lambda \tilde{h}_+(x) = f_+(x) + \tilde{h}_+(F(x)). \quad (4.48)$$

$$f_-(x + \tilde{h}(x)) + \Lambda \tilde{h}_-(x) = f_-(x) + \tilde{h}_-(F(x)). \quad (4.49)$$

Lo que nos lleva a,

$$\tilde{h}_+(x) = \Lambda_+^{-1} \tilde{h}_+(F(x)) - \Lambda_+^{-1} f_+(x + \tilde{h}(x)) + \Lambda_+^{-1} f_+(x). \quad (4.50)$$

y

$$\tilde{h}_-(x) = -\Lambda_- \tilde{h}_-(F^{-1}(x)) + f_-(F^{-1}x + \tilde{h}(F^{-1}x)) - f_-(F^{-1}x). \quad (4.51)$$

Afirmación 2.2.1: La función \tilde{h} es α -Hölder.

Para probar esta afirmación vamos hacer uso nuevamente del Lema 4.1, considerando para esto las siguientes funciones

$$\begin{aligned} G_1(x) &= F(x); G_2(x) = F^{-1}(x); & h_1(x, y) &= -\Lambda_+^{-1} f_+(x + y) + \Lambda_+^{-1} f_+(x); \\ h_2(x, y) &= f_-(F^{-1}(x) + y); & H_1(x) &= x; H_2(x) = F^{-1}(x). \end{aligned}$$

Ahora vamos a verificar que estas funciones satisfacen las condiciones del Lema 4.1. En efecto, por el Lema 4.2 podemos tomar una norma en E tal que

$$\max\{\|\Lambda_- \cdot\| \cdot \|\Lambda^{-1}\|^\alpha, \|\Lambda_+^{-1} \cdot\| \cdot \|\Lambda\|^\alpha\} < 1. \quad (4.52)$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \|G_1(x) - G_1(x')\| &\leq \|F(x) - F(x')\| \\ &\leq \underbrace{\|\Lambda\|}_{L_1} \|x - x'\|. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|G_2(x) - G_2(x')\| &\leq \|F^{-1}(x - x')\| \\ &\leq \underbrace{\|\Lambda^{-1}\|}_{L_2} \|x - x'\|. \end{aligned}$$

En seguida, por Ec. (4.39) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|h_1(x, y) - h_1(x', y')\| &= \|-\Lambda_+^{-1}f_+(x + y) + \Lambda_+^{-1}f_+(x' + y')\| \\
&+ \|\Lambda_+^{-1}f_+(x) - \Lambda_+^{-1}f_+(x')\| \\
&\leq \delta\|\Lambda_+^{-1}\|\|(x - x') + (y - y')\| + \delta\|\Lambda_+^{-1}\|\|(x - x')\| \\
&\leq \delta\|\Lambda_+^{-1}\|\|(x - x', y - y')\| + \delta\|\Lambda_+^{-1}\|\|(x - x', y - y')\| \\
&\leq 2\delta\|\Lambda_+^{-1}\|\|(x - x', y - y')\| \\
&\leq 2\delta\|(x - x', y - y')\|.
\end{aligned}$$

También tenemos, por Ec. (4.39)

$$\begin{aligned}
\|h_2(x, y) - h_2(x', y')\| &\leq \|f_-(F^{-1}(x) + y) - (f_-(F^{-1}(x') + y'))\| \\
&+ \|f_-(F^{-1}(x)) - f_-(F^{-1}(x'))\| \\
&\leq \delta\|F^{-1}((x) + y) - F^{-1}((x') + y')\| + \|F^{-1}(x) - F^{-1}(x')\| \\
&\leq \delta(\|\Lambda^{-1}\|\|x - x'\| + \|y - y'\|) + \delta\|\Lambda^{-1}\|\|x - x'\| \\
&\leq \delta(\|\Lambda^{-1}\|\|x - x'\| + \|\Lambda^{-1}\|\|y - y'\|) + \delta\|\Lambda^{-1}\|\|x - x'\|; \\
&\leq 2\delta\|\Lambda^{-1}\|\|(x - x', y - y')\|.
\end{aligned}$$

Por el Lema (3.4) tenemos que

$$\sup\|h_1(x, y)\| \leq \delta \quad y \quad \sup\|h_2(x, y)\| \leq \delta\|\Lambda_+^{-1}\| \leq \delta.$$

También se tiene que

$$\begin{aligned}
\|H_1(x) - H_1(x')\| &\leq \|x - x'\| \\
&\leq \underbrace{\|\Lambda^{-1}\|}_L \|x - x'\|.
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\|H_2(x) - H_2(x')\| &\leq \|F^{-1}(x) - F^{-1}(x')\| \\
&\leq \|\Lambda^{-1}(x - x')\| \\
&\leq \underbrace{\|\Lambda^{-1}\|}_L \|x - x'\|.
\end{aligned}$$

Luego, combinando las ecuaciones anteriores, para un $\delta > 0$ suficientemente pequeño

tenemos que,

$$\max\{\|\Lambda_1\|, \|\Lambda_2\|\} + \delta < 1.$$

y

$$\max\{\|\Lambda_1\|L_1^\alpha, \|\Lambda_2\|L_2^\alpha\} + \delta L^\alpha < 1.$$

Por tanto, por el Lema 4.1, el sistema (4.27) y (4.28) tiene una única solución acotada $\tilde{h} = (\tilde{h}_-, \tilde{h}_+)$ α -Hölder. Lo que prueba la Afirmación 2.2.1.

Así, usando los mismos argumentos anteriores tenemos que \tilde{H} es la aplicación identidad. Lo que concluye la prueba de la Afirmación 2.

Entonces usando las Afirmaciones 1 y 2, nos lleva a mostrar que Φ es un homeomorfismo α -Hölder y Ψ es sua inversa. Lo que concluye la prueba de nuestro Teorema principal.

■

Observación 4.1. Devemos tener en cuenta que el Teorema de Linealización C^α -Hölder Grobman-Hartman 4.1 tiene dos limitaciones serias. Primero, no nos dice nada cuando la linealización tiene autovalor con norma uno. En segundo lugar, cuando se aplica, proporciona información solo en una vecindad de los puntos fijos hiperbólicos.

Observación 4.2. Note que por el Teorema de Linealización C^α -Holder Grobman-Hartman 4.1, obtenemos que todo punto fijo hiperbólico de un difeomorfismo es aislado. Pues $f'(0)$ solamente el cero es un punto fijo hiperbólico, lo que nos lleva a ver $h(U)$ f tiene un único punto fijo hiperbólico.

Teorema 4.2 (Estabilidad local de Puntos fijos hiperbólicos). Sea $f : V \subset E \rightarrow E$ una aplicación de clase C^r , $r \geq 1$ tal que $0 \in V$, $Df(0)$ es invertible y 0 es un punto fijo hiperbólico de f . Entonces existe una vecindad \mathcal{N} de f en $C^1(V, E)$ de modo que para toda función $g \in \mathcal{N}$ es conjugada localmente a f en 0 , esto es, existe un abierto $0 \in U$ y un C^α homeomorfismo $h : U \rightarrow E$ tal que

$$h \circ g(z) = f \circ h, \quad \text{para } z \in U.$$

Además, $h(0)$ es el único punto fijo hiperbólico de g en una vecindad.

Demostración: Por Lema (3.4) tenemos que, para todo $\epsilon > 0$, existe $\phi : E \rightarrow E$, $Lip(\phi) < \epsilon$ y una vecindad de $0 \in U$ tal que

$$f(z) = (\underbrace{L_f}_{Df(0)} + \phi)(z) \quad \text{para } z \in U.$$

Sea $g \in C^1(V, E)$ tal que g es suficientemente próxima de f en $C^1(V, E)$.

Desde que $g \in C^1(V, E)$ entonces para todo $\epsilon > 0$, existe una función $\varphi : E \rightarrow E$ con $Lip(\varphi) < \epsilon$, tal que

$$g(z) = (L_g + \varphi)(z), \quad \text{para } z \in U.$$

Como g esta bien próxima de f entonces

$$|L_f - L_g| < \epsilon.$$

Luego,

$$\begin{aligned} g &= L_g + \varphi \\ &= L_f + \underbrace{(L_g - L_f)}_{\tilde{\varphi}} + \varphi, \end{aligned}$$

donde $Lip(\tilde{\varphi}) \leq \epsilon + \epsilon \leq 2\epsilon$. Por el Teorema de Linealización C^α -Hölder Grobman-Hartman 4.1 existe un homeomorfismo h_g , de clase C^α en una vecindad de $0 \in U_g$ tal que

$$h_g \circ L_f = g \circ h_g$$

en U_g . Entonces

$$L_f = h_g^{-1} \circ g \circ h_g \tag{4.53}$$

en una vecindad de 0.

Mas, usando nuevamente el Teorema de Grobman-Hartman existe un homeomorfismo h_f , de clase C^α una vecindad de $0 \in U_f$ tal que

$$h_f \circ L_f = f \circ h_f. \tag{4.54}$$

Así, substituyendo Ec. (4.53) en Ec. (4.54), obtenemos

$$h_f \circ h_g^{-1} \circ g \circ h_g = f \circ h_f,$$

en una vecindad de 0. Por tanto

$$\underbrace{h_f \circ h_g^{-1}}_h \circ g \circ \underbrace{h_g \circ h_f^{-1}}_{h^{-1}} = f,$$

en una vecindad de 0. Lo que concluye la prueba. ■

4.4 Ejemplos

Ejemplo 4.1 (Puntos Fijos Hiperbólicos de Difeomorfismos del Plano [BG05]). Usando el Teorema de Linealización C^α -Holder Grobman-Hartman 4.1, tenemos que los puntos fijos hiperbólicos p de difeomorfismos del plano se pueden clasificar localmente de acuerdo con la naturaleza de los valores propios de $Df(p)$. Esto es, si el espectro es $\sigma(Df(p)) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$. Entonces tenemos la siguiente clasificación:

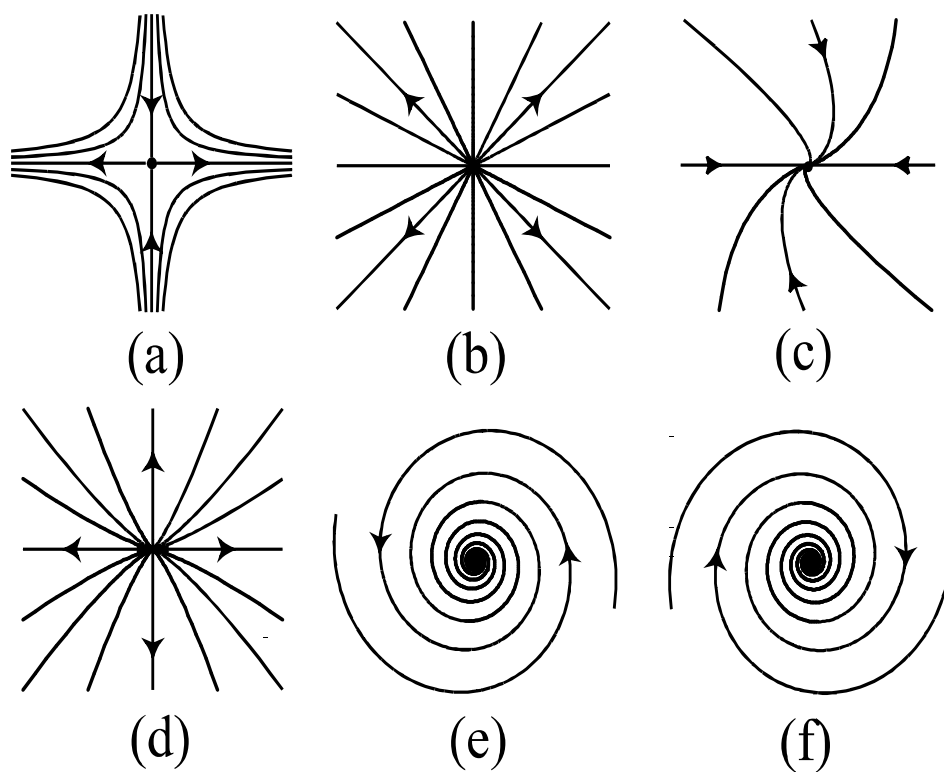


Figura 4.1: Puntos fijos hiperbólicos en el plano. [BG05].

1. **Punto de silla.** Si λ_1 y λ_2 son autovalores reales, tal que $|\lambda_1| > 1$ y $|\lambda_2| < 1$, entonces las órbitas cercanas siguen trayectorias como se muestra en la Figura 4.1 (a).
2. **Atractor/repulsor de punto fijo.** Si λ_1 y λ_2 son autovalores reales e iguales con los autovectores independientes. Las trayectorias cerca de tal repulsor punto fijo se muestra en la Figura 4.1 (b).

3. **Atractor/repulsor de punto fijo.** Si λ_1 y λ_2 son autovalores reales e iguales con los autovectores dependientes. Las trayectorias cerca de tal atractor punto fijo como se muestra en la Figura 4.1 (c).
4. **Atractor/repulsor de punto fijo.** Si $|\lambda_1| < |\lambda_2| < 1$ o $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 1$. Trayectorias cerca de tal punto fijo que se repelan se muestran en la Figura 4.1 (d).
5. **Atractor/repulsor de punto fijo.** Si λ_1 y λ_2 son autovalores complejo, conjugados. Se muestran trayectorias cerca de un punto fijo atractor. Figuras 4.1 (e) y (f): el signo de la parte imaginaria determina la dirección a lo largo de las órbitas en sentido horario o anti-horario.

Ejemplo 4.2 (Aplicación de Hénon). En el año 1976, M. Henón definió la función $H_{ab} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$H_{ab} = (-ax^2 + 1 + y, bx).$$

Ejemplo 4.3 (Algunas propiedades de la aplicación de Hénon). La aplicación de Hénon H_{ab} tiene las siguientes propiedades:

1. Podemos verificar que $H_{ab} = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ donde

$$f_1(x, y) = (x, -ax^2 + y + 1),$$

$$f_2(x, y) = (bx, y),$$

$$f_3(x, y) = (y, x).$$

2. La aplicación H_{ab} es inyectiva. Si $b \neq 0$, la inversa de H_{ab} es

$$H_{ab}^{-1}(x, y) = \left(\frac{1}{b}y, -1 + \frac{a}{b^2}y^2 + x \right).$$

3. La función H_{ab} tiene los siguientes puntos fijos.

$$p^\pm = \frac{1}{2a} \left(b - 1 \pm \sqrt{4a + (1 - b)^2} \right) (1, b)$$

Por tanto para cada b existe $a_0(b) = -\frac{1}{4}(1 - b)^2$ de forma que:

- (i) Si $a < a_0(b)$, entonces la función H_{ab} no tiene puntos fijos.
- (ii) Si $a = a_0(b)$, entonces la función H_{ab} tiene un único punto fijo.
- (iii) Si $a > a_0(b)$ entonces la función H_{ab} tiene dos puntos fijos p^+ y p^- .

4. Tenemos que los autovalores de la matriz jacobiana de H_{ab} en un punto (x_0, y_0) son

$$\lambda_{1,2} = -ax_0 \pm \sqrt{(ax_0^2 + b)}.$$

Tenemos que ,

- (i) si $a > a_0$, entonces p^- es un punto de silla;
- (ii) si $a_1(b) = \frac{3}{4}(1-b)^2 > a_0(b)$, entonces p^+ es un punto atractor si $a_0 < a < a_1$ y para p^+ es un punto de silla.

Ejemplo 4.4. Considere la aplicación de Hénon en el caso $a = b = 1$, esto es,

$$H_{11}(x, y) = (1 + y - x^2, x).$$

Note que las órbitas de la aplicación de Hénon son $\{(x_{n+1}, y_{n+1})\}$, donde

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + y_n - x_n^2, \\ y_{n+1} &= x_{n+1}. \end{aligned}$$

Usando el Ejemplo 4.3,item (3), tenemos que H_{11} tiene dos puntos fijos $(1, 1)$ y $(-1, -1)$.

- Ahora, usando nuevamente por el Ejemplo (3), ítem (4), tenemos que espectro $\sigma(DH_{11}(1, 1))$ es

$$\lambda_1 = -1 + \sqrt{2} \approx 0,4142, \quad \lambda_2 = -1 - \sqrt{2} \approx -2,4142.$$

- También, tenemos que el espectro $\sigma(DH_{11}(-1, -1))$ es

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2} \approx 2,4142, \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{2} \approx -0,4142.$$

Luego, usando el Teorema de Linealización C^α -Hölder Grobman-Hartman 4.1, tenemos que existen conjugaciones h_1 y h_2 de clase C^α , de modo que

$$h_1 \circ H_{11} = DH_{11}(1, 1) \circ h_1$$

y

$$h_2 \circ H_{11} = DH_{11}(-1, -1) \circ h_2.$$

Esto quiere decir que en las vecindades de $(1, 1)$ y $(-1, -1)$ el comportamiento de la aplicación H_{11} son de tipo “silla”. Ver Ejemplo 4.1 y Gráfico 4.1

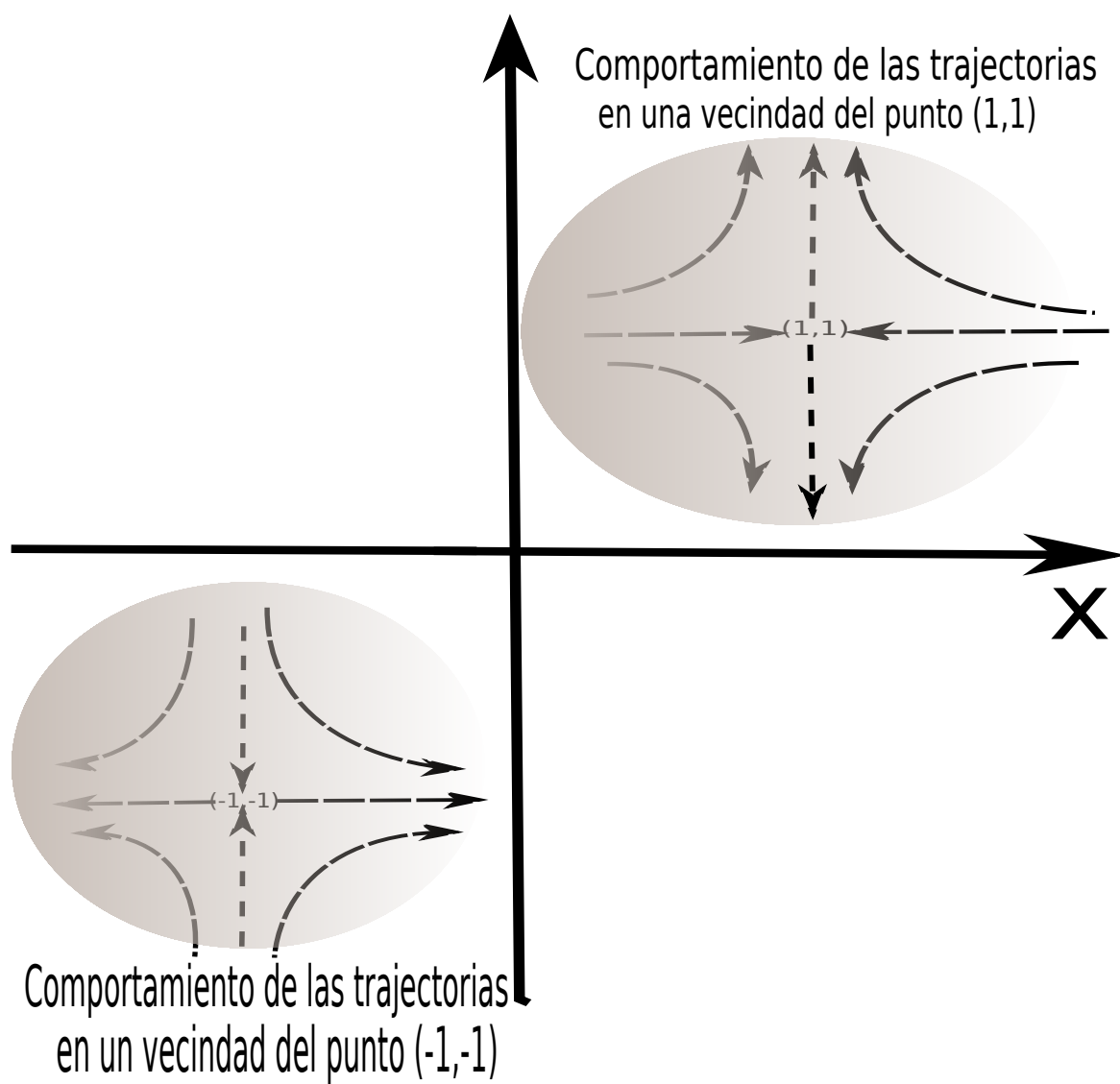


Figura 4.2: Trayectorias de la aplicación de Hénon H_{11} alrededor de sus puntos fijos .

Teorema de Linealización C^α -Hölder Grobman-Hartman para Ecuaciones Diferenciales

En esta sección probaremos el Teorema de Grobman-Hartman para difeomorfismos. Para tal fin, vamos a seguir de manera próxima los artículos de Hartman [Har60b], [Har63], Palis [Pal68] y los libros de Sotomayor[Sot79], Castro [Cas09], Palis-de Mello [JPJ82] y Teschl [Tes12].

Definición 5.1. (*Conjugación de campos*). Sean X y Y dos campos vectoriales de \mathbb{R}^n , $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $Y : V \rightarrow \mathbb{R}^n$, y sean $\phi : D \rightarrow U$ y $\psi : \hat{D} \rightarrow V$ los flujos de X e Y , respectivamente. Decimos que X es topológicamente conjugado a Y (resp. C^k -conjugado) cuando existe un homeomorfismo (resp, un difeomorfismo C^k) $h : U \rightarrow V$ tal que

$$h(\phi(t, x)) = \psi(t, h(x)),$$

para todo $(t, x) \in D$. En este caso, se tiene necesariamente $I^{\text{máx}}(x) = I^{\text{máx}}(h(x))$, donde $I^{\text{máx}}(x)$ y $I^{\text{máx}}(h(x))$ denotan los intervalos máximos de las respectivas soluciones máximas. El homeomorfismo h se llama conjugación topológica (resp. C^r -conjugación) entre X e Y .

Ejemplo 5.1. Considere las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea el campo $X(x, y) = A(x, y)^t = (-x - 3y, -3x - y)$. Tenemos que el flujo es dado por

$$\varphi(t, (a, b)) = e^{At}(a, b), \quad \text{donde } t \in \mathbb{R} \text{ y } (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Sea $\psi(t, p)$ el flujo de tipo “silla” $Y = B(x, y)^t = (2x, -4y)$ (ver Subsección 5.3.1). Se puede verificar que la rotación de 45° , $h(x, y) = R(x, y)^t = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y, -x + y)$, es una función analítica con inversa analítica $h^{-1}(x, y) = R^{-1}(x, y)^t = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y, x + y)$. Desde que $B = h^{-1}Ah$, implica $e^{Bt} = h^{-1}e^{At}h$, tenemos que

$$h(\psi(t, p)) = \varphi(t, h(p)).$$

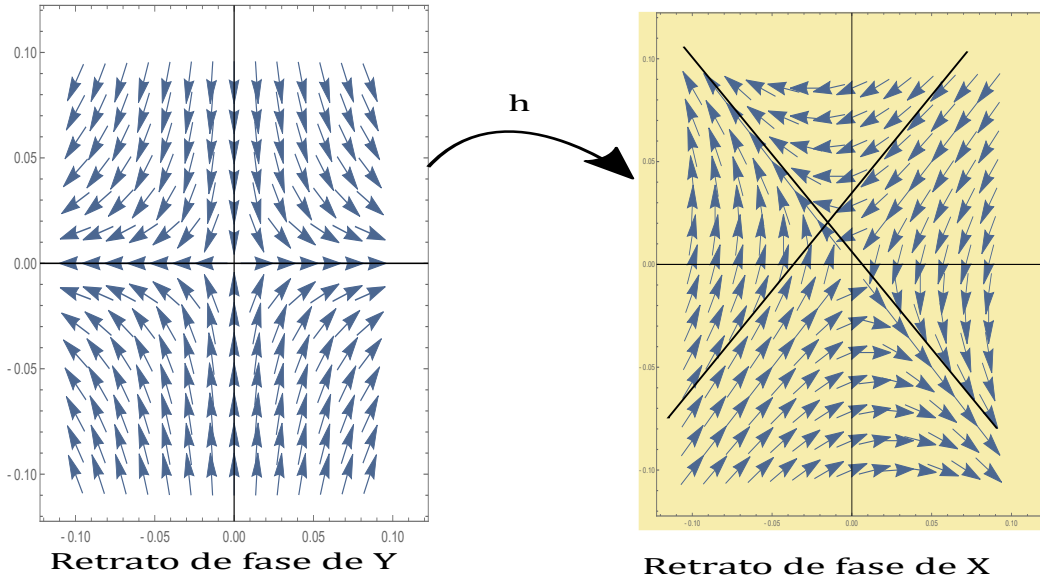


Figura 5.1: Conjugación de dos sillas.

Ejemplo 5.2 ([Sot79]). Sea el campo $X = (x, -y + x^3)$. Tenemos que el flujo es dado por

$$\varphi(t, (a, b)) = \left(ae^t, \left(b - \frac{a^3}{4}\right)e^{-t} + \frac{a^3}{4}e^{3t} \right),$$

donde $t \in \mathbb{R}$ y $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Sea $\psi(t, p)$ el flujo de tipo “silla” $Y = (x, -y)$ (ver Subsección 5.3.1). Se puede verificar que $h : (x, y) \longrightarrow \left(x, y + \frac{x^3}{4}\right)$ es una función analítica con inversa $h^{-1}(x, y) = \left(x, y - \frac{x^3}{4}\right)$ tal que

$$h(\psi(t, p)) = \varphi(t, h(p)).$$

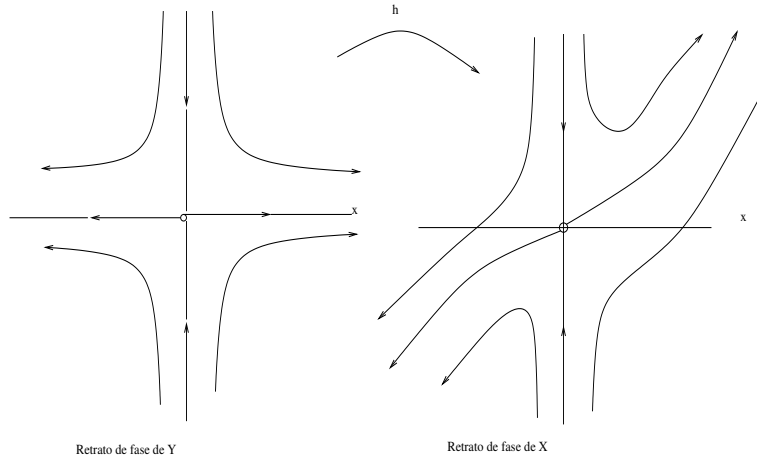


Figura 5.2: Conjugación de dos sillas, siendo una no-lineal. [Sot79].

Teorema 5.1 (Desigualdad de Gronwall Generalizado). Sean $\alpha : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ y $\kappa : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^+$ funciones continuas. Supongamos que $u : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ satisfice

$$u(t) \leq w(t) + \int_a^t \kappa(s)u(s)ds, \quad (5.1)$$

para todo $t \in [a, b)$. Entonces,

$$u(t) \leq w(t) + \int_a^t \kappa(s)w(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r)dr\right) ds. \quad (5.2)$$

Demostración: Considere la función $r(t) = \int_a^t \kappa(s)u(s)ds$. Por el teorema fundamental del cálculo 2.4 tenemos $r'(t) = \kappa(t)u(t)$. Luego

$$r'(t) - \kappa(t)r(t) = \kappa(t)[u(t) - r(t)].$$

Por hipótesis $u(t) \leq w(t) + r(t)$. Dado que $\kappa(t) \geq 0$, entonces

$$\kappa(t)[u(t) - r(t)] \leq \kappa(t)w(t).$$

Así, obtenemos

$$r'(t) - \kappa(t)r(t) \leq \kappa(t)w(t).$$

Multiplicando por el factor integrante $\exp\left(-\int_a^t \kappa(r)dr\right)$ se obtiene:

$$\frac{d}{dt}[\exp(-\int_a^t \kappa(r)dr)] \leq \exp\left(-\int_a^t \kappa(r)dr\right) \kappa(t)w(t).$$

Ahora, integrando de a hasta t :

$$\exp\left(-\int_a^t \kappa(r)dr\right) r(t) \leq \int_a^t \kappa(s)w(s) \exp\left(-\int_a^t \kappa(r)dr\right) ds.$$

De donde, obtenemos que

$$r(t) \leq \int_a^t \kappa(s)w(s) \exp\left(\int_a^t \kappa(r)dr\right) \exp\left(-\int_a^t \kappa(r)dr\right) ds,$$

el cual se puede escribir de forma equivalente

$$r(t) \leq \int_a^t \kappa(s)w(s) \exp\left(\int_s^t \kappa(r)dr\right) ds.$$

Por tanto, sustituyendo en la hipótesis

$$u(t) \leq w(t) + \int_a^t \kappa(s)w(s) \exp\left(\int_s^t \kappa(r)dr\right) ds.$$

■

Corolário 5.1 (Desigualdad de Gronwall). Sean $\alpha : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ y $\kappa : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}^+$ funciones continuas con α creciente ($\alpha(s) \geq \alpha(t), s \geq t$). Supongamos que $u : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ satisface

$$u(t) \leq w(t) + \int_a^t \kappa(s)u(s)ds, \quad (5.3)$$

para todo $t \in [a, b)$. Entonces,

$$u(t) \leq w(t) \exp\left(\int_s^t \kappa(r)dr\right) ds. \quad (5.4)$$

Lema 5.1. Sea $X : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo de vectores de clase C^k , ($k \geq 1$) con $X(0) = 0$. Sea $L = DX(0)$. Entonces, dado $\epsilon > 0$ existe un campo $Y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ con las siguientes propiedades :

1. Se tiene $Lip(Y) \leq K$ y, de donde obtenemos, que el flujo de Y es definido en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$;
2. Se tiene que $Y = L$ fuera de una bola $B(0, r)$;

3. Existe un abierto $U \subset V$ conteniendo cero tal que $Y = X$ en U ;

4. Si $Y_t = L_t + \phi_t$, existe $M > 0$ tal que $\|\phi_t\| \leq M$, para todo $t \in [-2, 2]$ y $L(\phi_1) \leq \epsilon$.

Demostración: Desde que $L = X'(0)$, se tiene que $X = L + \gamma$, donde $\gamma : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ con $\gamma(0) = 0$ y $D\gamma(0) = 0$. Sea $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^∞ tal que $\beta(\mathbb{R}) \subset [0, 1]$, $B(t) = 1$ si $t \leq \frac{r}{2}$ y $\beta(t) = 0$ si $t \geq r$.

Considere $\Gamma : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \beta(\|x\|)\gamma(x), & x \in V; \\ 0, & x \in \mathbb{R}^m - V. \end{cases}$$

Sea $\delta > 0$, por el Lema 3.4, podemos encontrar $r > 0$ de tal forma que Γ sea de clase C^k y sea δ -Lipschitz. Por definición de Γ , tenemos que $\Gamma = \gamma$ en $B(0, \frac{r}{2})$ y $\Gamma \equiv 0$ fuera de $B(0, r)$.

Definamos el campo $Y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ por $Y := L + \Gamma$. De ahí, $X = Y$ en $B(0, \frac{r}{2})$, $Y = L$ fuera de $B(0, r)$ e Y satisface ítem (1).

Ahora nos resta verificar ítem (4). De hecho, como consecuencia de la Desigualdad de Gronwall 5.1, tenemos que:

$$\|Y_t(x) - Y_t(y)\| \leq e^{k|t|} \cdot \|x - y\| \underbrace{\leq}_{|t| \leq 2} e^{2K} \cdot \|x - y\|.$$

Sea $\phi_t(y) := Y_t(y) - L_t(y)$, entonces,

$$\phi_t(x) - \phi_t(y) = [Y_t(x) - Y_t(y)] + [L_t(x) - L_t(y)].$$

De ahí

$$\phi_t(x) - \phi_t(y) = \int_0^t [\Gamma(Y_s(x)) - \Gamma(Y_s(y))] ds + \int_0^t L(\phi_s(x) - \phi_s(y)) ds.$$

Luego, aplicando norma, obtenemos

$$\begin{aligned} \underbrace{\|\phi_t(x) - \phi_t(y)\|}_{:=u(t)} &\leq \delta e^{2K} \|x - y\| 2 + \left| \int_0^t L(\phi_s(x) - \phi_s(y)) ds \right| \\ &\leq \underbrace{\delta e^{2K} \|x - y\| 2}_{:=\alpha(t)} + \int_0^t \underbrace{\|L\|}_{:=v(s)} \underbrace{|\phi_s(x) - \phi_s(y)|}_{:=u(s)} ds. \end{aligned}$$

De la desigualdade de Gronwal, tenemos que

$$|\phi_t(x) - \phi_t(y)| \leq \delta e^{2K} \|x - y\| 2 e^{\|L\| \int_0^t ds} \leq \delta e^{2K} \|x - y\| 2 e^{\|L\| 2}.$$

Por el Lema 3.4, podemos considerar que $Lip(\Gamma) \leq \frac{\epsilon}{(e^{2K}e^{\|L\|2})}$. Esto implica en particular, que $Lip(\phi_1) \leq \epsilon$.

Finalmente vamos a verificar que ϕ_t es acotada para todo $t \in [-2, 2]$.

- Si $x \notin B(0, r)$:

$$\|\phi_t(x)\| = \|\phi_t(x) - \phi_t(0)\| \leq \epsilon\|x - 0\| \leq \epsilon r.$$

- Si $x \in B(0, r)$: Primero note que $\Gamma(Y_s(x)) = 0$, si $Y_s(x) \notin B(0, r)$, tenemos que

$$\begin{aligned} |\phi_t(x)| &= |\phi_t(x) - \phi_t(0)| \\ &= \left| \int_0^t [\Gamma(Y_s(x)) - \Gamma(Y_s(0))]ds + \int_0^t L(\phi_s(x) - \phi_s(0))ds \right| \\ &\leq \int_0^t \epsilon r ds + \left| \int_0^t L(\phi_s(x) - \phi_s(0))ds \right| \leq 2\epsilon r + \|L\| \cdot \int_0^t |\phi_s(x) - \phi_s(0)|ds. \end{aligned}$$

Lo que implica nuevamente usando la desigualdade de Gronwall que existe $M > 0$ tal que

$$|\phi_t(x)| \leq M, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^m,$$

para todo $t \in [-2, 2]$. Lo que implica la prueba del ítem (4). ■

Observación 5.1. Por el Lema 5.1, tenemos que para cualquier campo $X : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^k , $k \geq 1$, se puede considerar localmente Lipschitz, con cualquier $k > r(X'(0))$, donde $r(X'(0)) = \max\{|\mu| : \mu \in \sigma(X'(0))\}$.

5.1 Teorema de Grobman-Hartman para Campos

Definición 5.2 (Singularidad Hiperbólica). Dado un campo de vectores $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, de clase C^k una singularidad $p \in U$ de X es llamada hiperbólica si la ecuación determinada por su parte lineal $DX(p) \in L(\mathbb{R}^m)$ es hiperbólica (esto es, si los autovalores de $DX(p)$ tienen parte real no nula).

Lema 5.2. Sea $X : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ un campo de vectores y φ_t su flujo. Entonces p es una singularidad hiperbólica de X si, y solamente si, p es un punto fijo hiperbólico del difeomorfismo φ_1 , en el tiempo 1 de X .

Demostración: (\Leftarrow) Si p es un punto fijo del tiempo 1 de X y es hiperbólico, en particular, por la estabilidad de puntos fijos hiperbólicos, es aislado. Se observa que el punto p no puede pertenecer a alguna órbita de período 1, pues en esta situación, los otros puntos de la órbita

periódica serían puntos fijos para φ_1 , y p no sería punto fijo aislado. Esto, es bastante intuitivo, basta seguir la trayectoria de un punto arbitrariamente próximo de p y el resultado es inmediato. Luego, desde que $\varphi(n, p) = p$, si $n \in \mathbb{N}$ y $\varphi(\cdot, p)$ no es periodo regular, sigue de la clasificación de las trayectorias para campos tenemos que $\varphi(t, p) = p$, para $p \in \mathbb{R}$, entonces p es singularidad (aislada) de X . Ahora, probaremos que p es singularidad hiperbólica, esto es, los elementos de $\sigma(X'(p))$ tienen parte real diferente de cero. De la dependencia diferenciable en relación a las condiciones iniciales tenemos que $\partial_x \varphi$ es solución de $Z'(t) = X'(p).Z(t)$; $Z(0) = I$. Por tanto, $\partial_x \varphi(x, t) = e^{t.X'(p)}$, de donde obtenemos

$$f'(p) = \partial_x \varphi(1, p) = e^{X'(p)},$$

y por tanto, el espectro $\sigma(f'(p)) = e^{\sigma(X'(p))}$. Así, desde que $|\lambda| \neq 1$, para todo $\lambda \in \sigma(Df(p))$, esto implica que $\Re(w) \neq 0$, para todo $w \in \sigma(DX(p))$.

(\Rightarrow) Si p es singularidad hiperbólica de X , es inmediato que es punto fijo de $f = \varphi_1$ (pues p , es estacionario $\varphi_t(p) = p$, para todo t). Como visto arriba, de la dependencia diferenciable en relación a las condiciones iniciales, tenemos que $\partial_x \varphi$ es solución de $Z'(t) = X'(p).Z(t)$; $Z(0) = I$. De donde, $\partial_x \varphi(x, t) = e^{t.DX(p)}$. Así,

$$Df(p) = \partial_x \varphi(1, p) = e^{DX(p)},$$

y por tanto, el espectro $\sigma(Df(p)) = e^{\sigma(DX(p))}$. Desde que $\Re(w) \neq 0$, para todo $w \in \sigma(DX(p))$, esto implica que $|\lambda| \neq 1$, para $\lambda \in \sigma(Df(p))$, esto es, p es punto fijo hiperbólico de la función f . ■

Teorema 5.2 (Teorema de Grobman-Hartman para Campos). Sean $W \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $X : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo de clase C^k ($k \geq 1$) y p una singularidad hiperbólica de X . Sea $L = X'(p)$. Entonces X es localmente C^α conjugado L , en una vecindad de p y cero respectivamente. Esto significa que si $\Phi_t(z)$ y $\varphi_t(z)$ son respectivamente las soluciones de los problemas de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x), \\ x(0) = z \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} \dot{y} = L(y), \\ y(0) = z, \end{cases} \quad (5.5)$$

entonces existe un homeomorfismo de clase C^α , $h : V \rightarrow U$, donde V y U son vecindades respectivamente de p y 0 , tal que $h(p) = 0$ y

$$h(\Phi_t(z)) = \varphi_t(h(z)),$$

siempre que $z, \Phi_t(z) \in V$. Esto nos garantiza, que a menos del homeomorfismo C^α , h , los retratos de fase de las ecuaciones (5.5), son los mismos respectivamente en vecindades de p y

0.

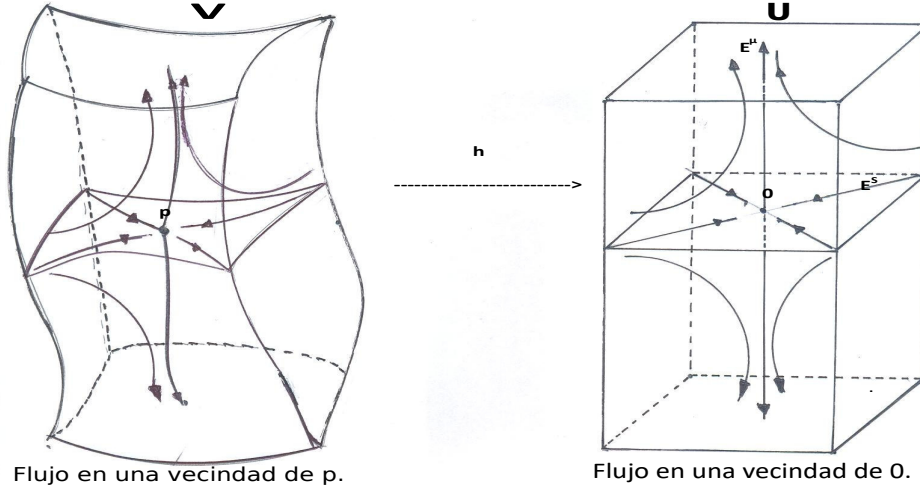


Figura 5.3: Interpretación geométrica del T-G-H para campos [Sot79].

Demostración: Sin pérdida de generalidad supongamos que $p = 0$.

Sea $Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo C^k como en el Lema 5.1. Como $Y = X$ en una vecindad U de cero, tenemos que la identidad conjuaga localmente X e Y . Como la conjugación es una relación de equivalencia, por tanto transitiva, nos resta probar que los flujos Y_t y L_t son conjugados, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Desde que $DY(0) = L$, de la dependencia diferenciable en relación a las condiciones iniciales, tenemos que la derivada $DY_1(0)$ del difeomorfismo inducido en el tiempo 1 es $e^L = L_1$. De hecho, escribiendo $\varphi(t, x) = Y_t(x)$, tenemos que

$$DY_t(x) = \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x}$$

es solución de

$$\begin{cases} Z'(t) &= DY(\varphi(t, x)).Z(t) \\ Z(0) &= I_m. \end{cases}$$

Como $Y(0) = 0$ entonces $\varphi(t, 0) = 0$, y la ecuación anterior queda :

$$\begin{cases} Z'(t) &= DY(0).Z(t) = LZ(t) \\ Z(0) &= I_m. \end{cases}$$

De esa forma $DY_t(0) = e^{tL}$, entonces $DY_1(0) = e^L = L_1$.

Luego, el difeomorfismo $Y_1 = L_1 + \phi_1$ tiene al origen como punto fijo hiperbólico y ϕ_1 el resto de su derivada L_1 en el origen. De esa forma, usando el Teorema de Linealización C^α -

Hölder Grobman-Hartman 4.1, existe un homeomorfismo de clase C^α , $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $h \circ Y_1(x) = L_1 \circ h(x)$. Mostraremos que este mismo h también conjuga todos los otros tiempos, esto es,

$$h \circ Y_t(x) = L_t \circ h(x),$$

para $t \in \mathbb{R}$ y para $x \in \mathbb{R}^m$. Lo que significa que Y y L son conjugados.

En efecto, sea $t \in \mathbb{R}$ un punto arbitrario. Definimos la función

$$\tilde{h}(x) = L_t \circ h \circ Y_{-t}(x).$$

Como \tilde{h} es la composición de dos homeomorfismos de clase C^α se tiene que \tilde{h} es un homeomorfismo de clase C^α .

Afirmación 1. $h = \tilde{h}$. En efecto,

$$\begin{aligned} \tilde{h}(Y_1(x)) &= L_t \circ h \circ Y_{-t} \circ Y_1(x) \\ &= L_t \circ L_1 \circ h \circ Y_{-t}(x) = L_1 \circ L_t \circ h \circ Y_{-t}(x) \\ &= L_1 \circ \tilde{h}. \end{aligned}$$

Por la unicidad del Teorema 4.1 tenemos que $h = \tilde{h}$.

Afirmación 2. $h \circ Y_t = L_t \circ h$, para $t \in \mathbb{R}$. De hecho,

$$\tilde{h} \circ Y_t(x) = L_t \circ h \circ Y_{-t} \circ Y_t(x) = L_t \circ \tilde{h}(x).$$

Desde que $h = \tilde{h}$ se tiene probado la Afirmación 2, y como fue tomado un $t \in \mathbb{R}$ arbitrario hemos probado el Teorema. ■

5.2 Contra-Ejemplo Para El Caso Continuo

El siguiente ejemplo, nos muestra que, con las hipótesis del Teorema de Grobman-Hartman 3.3, mismo siendo X un campo analítico puede no tener una conjugación de clase C^1 con la parte lineal $DX(0)$.

Ejemplo 5.3 (Hartman [Har60b]). Existe un campo analítico $X : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $(0, 0, 0)$ es un punto fijo hiperbólico, mas no existe una conjugación de clase C^1 con su parte lineal $DX(0)$.

Demostración: Considere el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha x \\ \dot{y} &= (\alpha - \gamma)y + \epsilon xz \\ \dot{z} &= -\gamma z. \end{cases}$$

Donde $\alpha > \gamma > 0$ y $\epsilon \neq 0$. Sea $X(x, y, z) = (\alpha x, (\alpha - \gamma)y + \epsilon xz, -\gamma z)$. Entonces,

$$L = DX(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha - \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix}.$$

También tenemos que la función $F(x, y, z) = \phi(1, (x, y, z))$ es dado por:

$$F(x, y, z) = (ax, ac(y + \epsilon xz), cz),$$

donde $a = e^\alpha$ y $c = e^{-\gamma}$. De ahí, tenemos que $a > ac > 1 > c > 0$ y

$$e^L = DF(0, 0, 0) = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Si suponemos que existe una C^1 linealización para el sistema, entonces existiría un difeomorfismo de clase C^1 , $h : U \rightarrow h(U)$ tal que

$$h(\phi(t, (x, y, z))) = e^{tL}h(x, y, z).$$

Si $t = 1$, tenemos que

$$\begin{aligned} h(\phi(1, (x, y, z))) &= e^L h(x, y, z) \\ h(F(x, y, z)) &= DF(0, 0, 0)h(x, y, z), \end{aligned}$$

lo que contradice el Ejemplo 3.2. Lo que concluye el ejemplo. ■

5.3 Aplicaciones para Campos Vectoriales

En esta sección vamos a dar algunas aplicaciones del Teorema de Linealización C^α -Holder Grobman-Hartman para Ecuaciones Diferenciales

5.3.1 Sistemas Bidimensionales

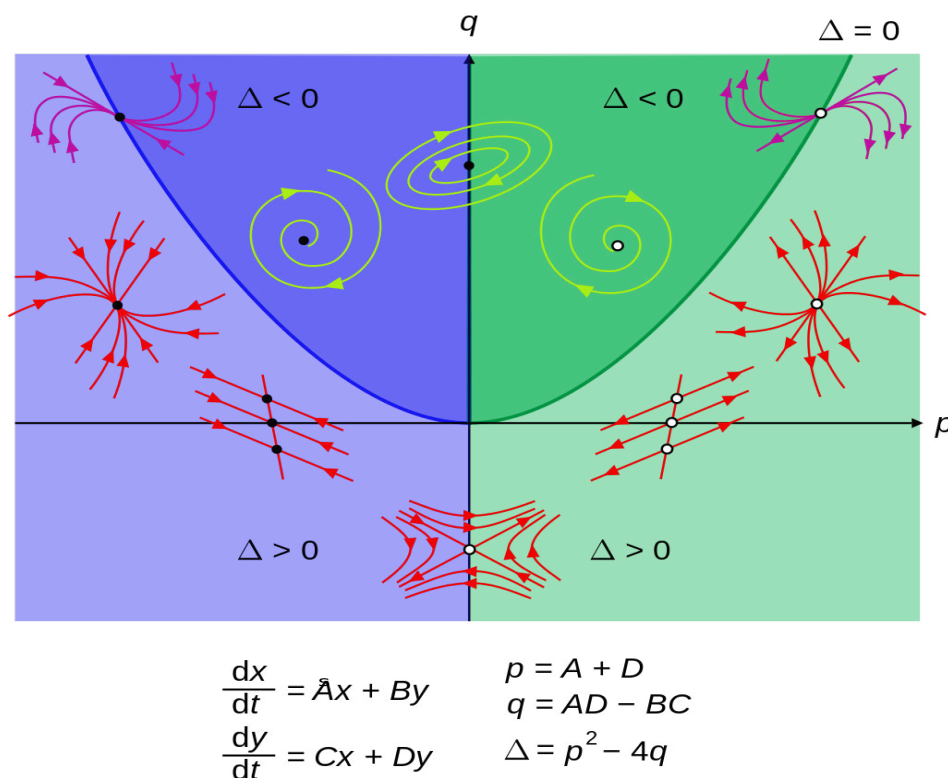


Figura 5.4: Sistemas Bidimensionales lineales. Fuente: <https://bit.ly/2O9LGUD>.

A seguir vamos a dar una descripción para sistemas bidimensionales simples. Para esto consideremos ahora sistemas reales de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + By, \\ \dot{y} &= Cx + Dy, \end{cases}$$

con $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ y $AD - CB \neq 0$. O, equivalentemente, ecuaciones lineales homogéneas del tipo

$$X' = HX, \quad \text{con} \quad H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \det(H) = AD - CB \neq 0. \quad (5.6)$$

Estas ecuaciones son asociadas a campos vectoriales lineales H en \mathbb{R}^2 . La condición $\det(H) \neq 0$ es equivalente a que el origen $0 \in \mathbb{R}^2$ sea el único punto donde H se anula, o sea, el único punto fijo del flujo lineal $\phi(t, x) = e^{tH}x$. Este punto fijo, o todo el sistema, se llama simple si

$\det H \neq 0$. El polinomio característico de A es

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0,$$

donde $p = A + D$ y $q = \det H = AD - CB$.

Luego, tenemos que los valores propios son

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Sea $\Delta = p^2 - 4q$. Distinguimos los siguientes casos:

- (a) Si $\Delta > 0$, los autovalores λ_1, λ_2 de H son reales distintos diferentes de cero.
 - Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, el punto de equilibrio se llama nodo estable.
 - Si $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, el punto de equilibrio se llama nodo inestable.
 - Si $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$, el punto de equilibrio se llama punto silla.
- (b) Si $\Delta < 0$, los autovalores son complejos conjugados: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, con $\beta \neq 0$.
 - Si $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, el punto de equilibrio se llama centro.
 - Si $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, con $\alpha < 0$, el punto de equilibrio se llama foco estable.
 - Si $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, con $\alpha > 0$, el punto de equilibrio se llama foco inestable.
- (c) Si $\Delta = 0$, entonces $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$.
 - Si $\lambda < 0$, H diagonal, el punto de equilibrio se llama nodo estelar estable.
 - Si $\lambda > 0$, H diagonal, el punto de equilibrio se llama nodo estelar inestable.
 - Si $\lambda < 0$, H no diagonal, el punto de equilibrio se llama nodo de una tangente estable.
 - Si $\lambda > 0$, H no diagonal, el punto de equilibrio se llama nodo de una tangente inestable.

A seguir, damos dos ejemplos de sistemas autónomos bidimensional No-lineal y estudiaremos sus órbitas usando el Teorema de Grobman-Hartman 3.3.

Ejemplo 5.4 ([GN92]). Consideremos ahora sistemas reales de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2x - 2x^2 - xy, \\ \dot{y} &= y - y^2 - 2xy. \end{cases} \quad (5.7)$$

1. El sistema tiene como puntos de equilibrio: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$.
2. Para encontrar la linealización de estos puntos fijos, encontramos los autovalores de la matriz

$$DX(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - 4x - y & -x \\ -2y & 1 - 2y - 2x \end{pmatrix}.$$

3. Así, las matrices linealizadas y sus autovalores son los siguientes:

$$DX(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2,$$

$$DX(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1,$$

$$DX(1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1.$$

4. Entonces, por el Teorema de Linealización C^α -Holder Grobman-Hartman para Ecuaciones Diferenciales 5.2 tenemos que el campo de la Ec. (5.7), es:

- localmente topológicamente conjugado (via un homeomorfismo h_1 de clase C^α), a $DX(0, 0)$ en una vecindad de $(0, 0)$ y $(0, 0)$, respectivamente.
- localmente topológicamente conjugado (via un homeomorfismo h_2 de clase C^α), a $DX(0, 1)$ en una vecindad de $(0, 1)$ y $(0, 0)$, respectivamente.
- localmente topológicamente conjugado (via un homeomorfismo h_3 de clase C^α), a $DX(1, 0)$ en una vecindad $(1, 0)$ y $(0, 0)$, respectivamente.

En la Figura 5.6 hemos bosquejado el retrato de fase del sistema (5.7) directamente. Observe la semejanza cerca del equilibrio con los retratos en la Figura 5.5.

Ejemplo 5.5 ([GN92]). Consideremos ahora sistemas reales de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= x - x^2 - xy, \\ \dot{y} &= -y + 2xy. \end{cases} \quad (5.8)$$

1. El sistema tiene como puntos de equilibrio: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
2. Para encontrar la linealización de estos puntos fijos, encontramos los autovalores de la

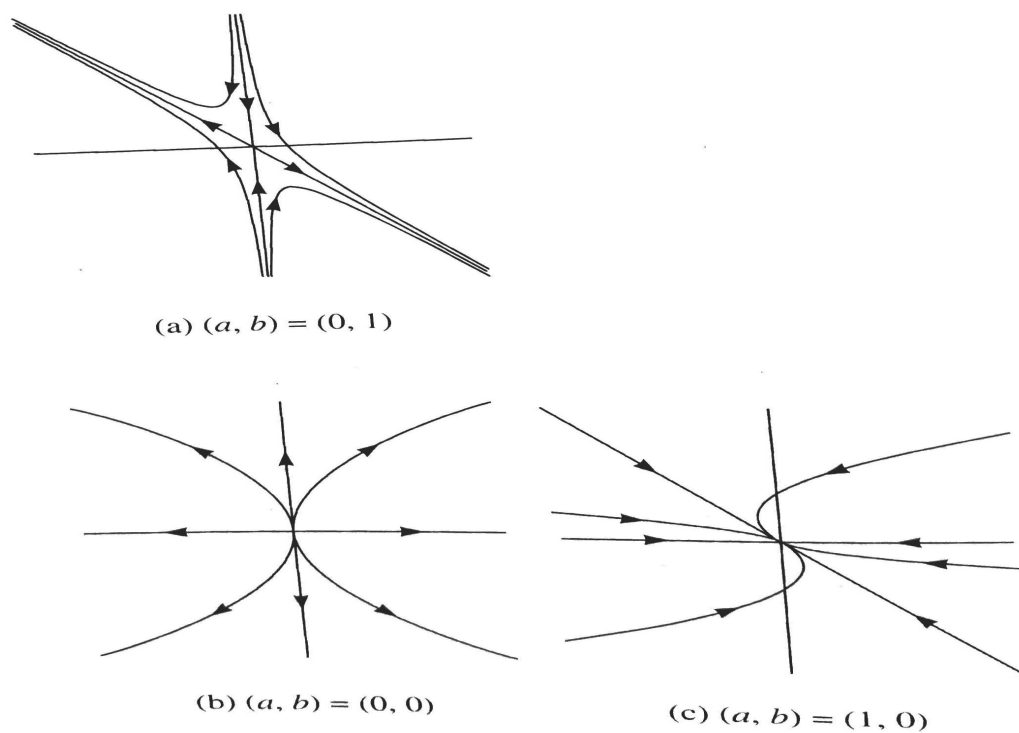


Figura 5.5: Linealización del sistema (5.7). [GN92]

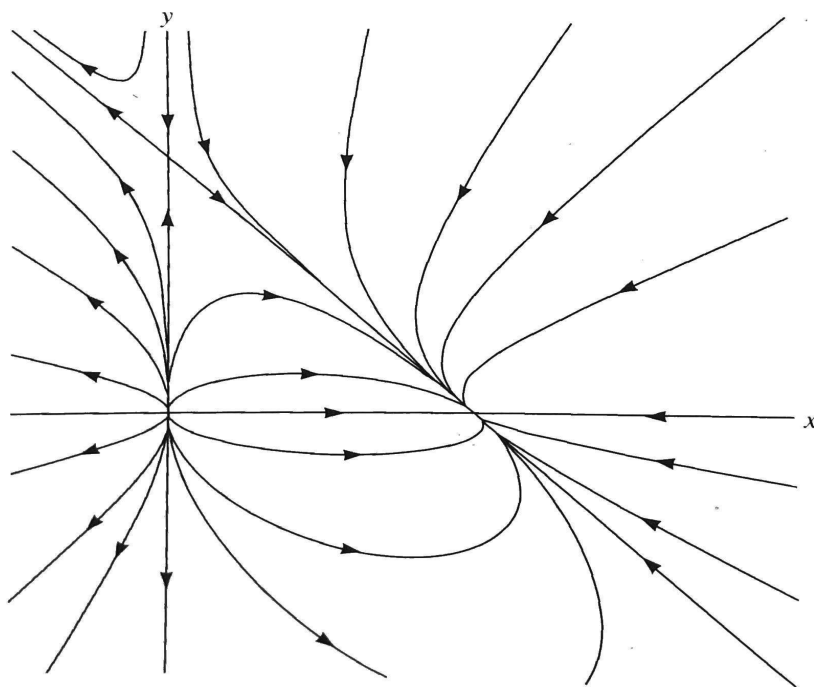


Figura 5.6: Retrato de fase del sistema (5.7). [GN92]

matriz jacobiana

$$DX(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ 2y & -1 + 2x \end{pmatrix}.$$

3. Así, las matrices linealizadas y sus autovalores son los siguientes:

$$DX(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1,$$

$$DX(1, 0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1,$$

$$DX\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_1 = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4}, \lambda_2 = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{4}.$$

4. Entonces, por el Teorema de Linealización C^α -Holder Grobman-Hartman para Ecuaciones Diferenciales 5.2 tenemos que el campo de la Ec. (5.11), es:

- localmente topológicamente conjugado (via un homeomorfismo h_1 de clase C^α), a $DX(0, 0)$ en una vecindad de $(0, 0)$ y $(0, 0)$, respectivamente.
- localmente topológicamente conjugado (via un homeomorfismo h_2 de clase C^α), a $DX(1, 0)$ en una vecindad de $(1, 0)$ y $(0, 0)$, respectivamente.
- localmente topológicamente conjugado (via un homeomorfismo h_3 de clase C^α), a $DX\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ en una vecindad $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $(0, 0)$, respectivamente.

En la Figura 5.8 hemos bosquejado el retrato de fase del sistema (5.8) directamente. Observe la semejanza cerca del equilibrio con los retratos en la Figura 5.7.

5.3.2 Ecuaciones de Lorenz

En 1963, el meteorólogo y matemático E.N. Lorenz publicó un conocido artículo llamado Flujo Determinístico no periódico (Deterministic Nonperiodic Flow [Lor63]) en la tentativa de establecer un sistema de ecuaciones diferenciales que explicara el comportamiento imprevisible del clima, después de experimentar con varios ejemplos, derivados de ecuación de B.Saltzman sobre la convección del fluido térmico, las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias polinómicas

$$(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\sigma(y - x), \rho x - y - xz, -\beta z + xy), \quad (5.9)$$

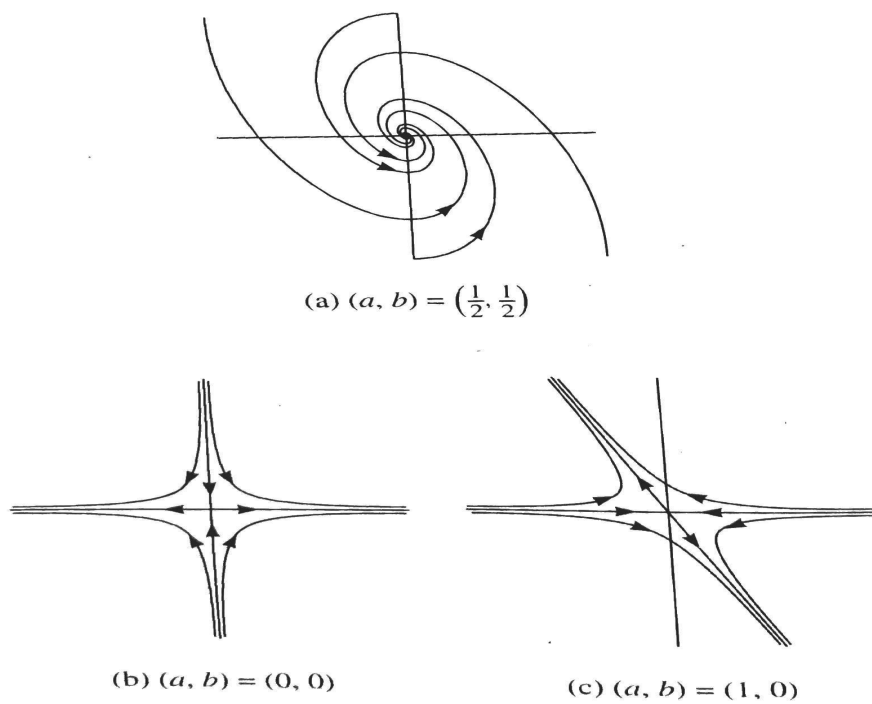


Figura 5.7: Linealización del sistema (5.8). [GN92]

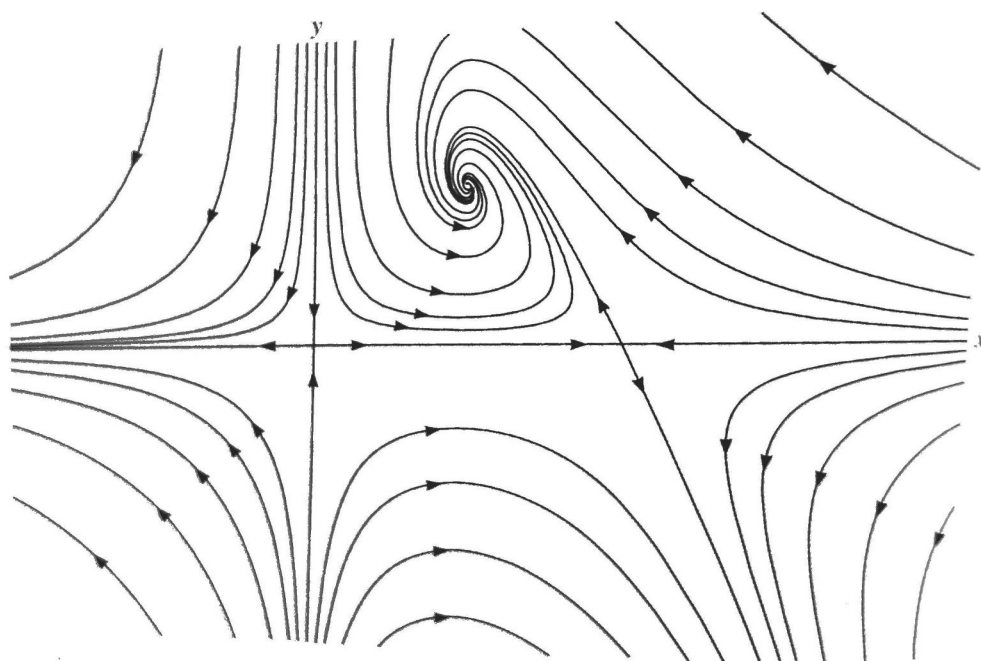


Figura 5.8: Retrato de fase del sistema (5.8). [GN92]

donde $(\sigma, \rho, \beta) = (10, 20, \frac{8}{3})$. Lorenz encontró soluciones numéricas que permanecen limitado para siempre y las soluciones comenzaron de manera muy diferente, pero finalmente tienen más o menos el mismo destino: las soluciones parecen girar alrededor de un par de puntos, alternando en momentos en que punto rodean. Este es el primer hecho importante sobre los sistemas de Lorenz: todas las soluciones de no-equilibrio tienden eventualmente al mismo conjunto complicado, el llamado “Atractor de Lorenz”. Otro hecho que fue señalado por Lorenz en la Ec. (5.9); fue que el atractor de Lorenz tiene sensibilidad a las condiciones iniciales o también conocido como “efecto mariposa”, es decir, no importa cuán próximas estén dos soluciones en el inicio, ellas tendrán un comportamiento en el futuro diferente, una de las principales características de un “Sistema caótico”. Este fue uno de los primeros ejemplos de lo que ahora se conoce como “caos.”

A seguir, vamos a presentar un estudio más detallado de la ecuación de Lorenz cuando los parámetros (σ, ρ, β) mudan

Considere el sistema de Lorenz

$$\begin{aligned} x' &= -ax + ay, & a > 0 \\ y' &= rx - y - xz, & r > 0 \\ z' &= xy - bz, & b > 0, \end{aligned} \tag{5.10}$$

donde, a es el número de Prandtl, r es el número de Rayleigh, y b constante de proporcionalidad. Como usualmente, para analizar el sistema (5.10), vamos a comenzar a encontrar los puntos de equilibrio de $X(x, y, z) = (-\alpha x + \alpha y, rx - y - xz)$. Es útil observar que el campo vectorial X posee una simetría. De hecho, si $S(x, y, z) = (-x, -y, z)$ entonces $S(X(x, y, z)) = X(S(x, y, z))$. Es decir, la reflexión a través del eje z preserva el campo vectorial. En particular, si $(x(t), y(t), z(t))$ es una solución de las ecuaciones de Lorenz, entonces también lo es $(-x(t), -y(t), z(t))$ y entonces las soluciones se alejan de este eje en pares simétricos. En particular, cualquier punto de equilibrio (x, y, z) , $x \neq 0$, $y \neq 0$ tiene un par $(-x, -y, -z)$ en el otro lado del eje z . Desde que $\alpha \neq 0$, $b \neq 0$, y $(-ax + ay, rx - y - xz, xy - bz) = 0$, implica $x = y$, $x^2 = bz$, y $xy - bz = 0$. Esta última ecuación puede escribirse

$$rx - x - \frac{x^3}{b} = 0;$$

por lo tanto, el sistema siempre tiene un punto de equilibrio en 0, y cualquier otro punto de equilibrio debe satisfacer

$$\frac{x^2}{b} = r - 1.$$

Por lo tanto, para $0 < r < 1$, el único punto de equilibrio es el origen. En $r = 1$, se produce

una bifurcación de “horquilla”, aparecen dos puntos fijos más:

$$p_1 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1)$$

y

$$p_2 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1).$$

Para verificar la estabilidad de estos puntos de equilibrio, encontramos los autovalores de la matriz

$$DX(x, y, z) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ r-z & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}.$$

Así, el equilibrio en el origen tiene la estabilidad lineal determinada por el jacobiano

$$DX(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

La dirección z corresponde a un vector propio con valor propio $\lambda_3 = -b$ y, por lo tanto, siempre atrae a $b > 0$. Los otros dos valores propios están determinados por

$$\lambda^2 + (\alpha + 1)\lambda + \alpha(1 - r) = 0.$$

Así,

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}(-(\alpha + 1) \pm \sqrt{(\alpha + 1)^2 - 4\alpha(1 - r)}).$$

1. Teniendo en cuenta que ambos λ_{\pm} son negativos cuando $r < 1$. Por lo tanto, conocemos que el origen es estable y globalmente un atractor.
2. Cuando $r > 1$ uno de estos valores propios son negativos y el otro es positivo, por lo que el origen es un fijo hiperbólico con dos direcciones de contracción y una dirección de expansión. Las trayectorias que se mueven a lo largo de las últimas direcciones son atraídas a uno de los dos puntos fijos p_1 y p_2 , que existen precisamente cuando $r > 1$, esta es la situación que se muestra en la Figura 5.9.

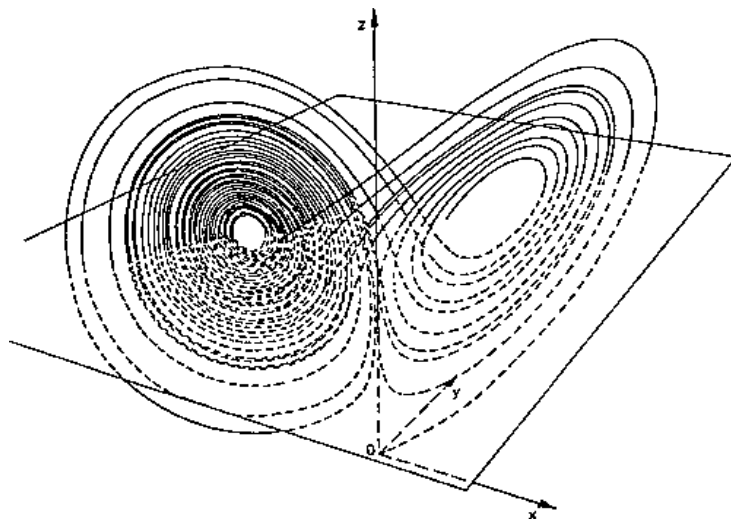


Figura 5.9: Interpretación geométrica numérica de la ecuación de Lorenz. [GH83]

Ejemplo 5.6 (Linealización C^α -Hölder para las Ecuaciones de Lorenz). Considere el sistema de Lorenz

$$\begin{aligned} x' &= -\alpha x + \alpha y, & \alpha > 0 \\ y' &= rx - y - xz, & r > 0 \\ z' &= xy - bz, & b > 0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Entonces, si $r \neq 1$, usando los ítems (1), (2) y el Teorema de Linealización C^α -Hölder Grobman-Hartman para Ecuaciones Diferenciales 5.2 tenemos que el campo de la Ec. (5.11) es localmente topológicamente conjugado (via un homeomorfismo h , de clase C^α), al sistema

$$DX(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix},$$

en una vecindad de $(0, 0, 0)$ y $(0, 0, 0)$ respectivamente.

Bibliografía

- [Alv14] José Alves. Hyperbolic isomorphisms in banach spaces. 06 2014.
- [ASY97] Kathleen T. Alligood, Tim D. Sauer, and James A. Yorke. *Chaos*. Textbooks in Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1997. An introduction to dynamical systems.
- [Bel73] G. R. Belickii. Functional equations, and conjugacy of local diffeomorphisms of finite smoothness class. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 7(4):17–28, 1973.
- [Bel78] G. R. Belickii. Equivalence and normal forms of germs of smooth mappings. *Uspekhi Mat. Nauk*, 33(1(199)):95–155, 263, 1978.
- [BG05] Keith Burns and Marian Gidea. *Differential geometry and topology*. Studies in Advanced Mathematics. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005. With a view to dynamical systems.
- [BR11] Genrich Belitskii and Victoria Rayskin. On Grobman-Hartman theorem in α -holder. 2011.
- [BV07] Luis Barreira and Claudia Valls. Hölder Grobman-Hartman linearization. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 18(1):187–197, 2007.
- [BV12a] Luis Barreira and Claudia Valls. *Dynamical Systems: An Introduction*. Universitext. Springer, 2013 edition, 2012.
- [BV12b] Luis Barreira and Claudia Valls. *Ordinary Differential Equations: Qualitative Theory*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 2012.
- [Cab03] Ernest; de la Llave Rafael Cabré, Xavier; Fontich. The parameterization method for invariant manifolds i: Manifolds associated to non-resonant subspaces. *Indiana University Mathematics Journal*, 52, 2003.

- [Cas09] Armando Castro. *Curso de equações diferenciais ordinárias*. 2009.
- [Chi99] Carmen Chicone. *Ordinary Differential Equations with Applications*. Texts in Applied Mathematics 34. Springer New York, 2nd edition, 1999.
- [Die69] J. Dieudonné. *Foundations of modern analysis*. Academic Press, New York-London, 1969. Enlarged and corrected printing, Pure and Applied Mathematics, Vol. 10-I.
- [GH83] John Guckenheimer and Philip Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, volume 42 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [GN92] M.M. Guterman and Z.H. Nitecki. *Differential Equations: A First Course*. First Course. Saunders College Pub., 1992.
- [Gro59] D. M. Grobman. Homeomorphism of systems of differential equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 128:880–881, 1959.
- [Gro62] D. M. Grobman. Topological classification of neighborhoods of a singularity in n -space. *Mat. Sb. (N.S.)*, 56 (98):77–94, 1962.
- [Har60a] Philip Hartman. A lemma in the theory of structural stability of differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11:610–620, 1960.
- [Har60b] Philip Hartman. On local homeomorphisms of Euclidean spaces. *Bol. Soc. Mat. Mexicana* (2), 5:220–241, 1960.
- [Har63] Philip Hartman. On the local linearization of differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 14:568–573, 1963.
- [Hol68] R. B. Holmes. A formula for the spectral radius of an operator. *American Mathematical Monthly*, 75, 02 1968.
- [IDA80] K. Ikeda, H. Daido, and O. Akimoto. Optical turbulence: Chaotic behavior of transmitted light from a ring cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 45:709–712, Sep 1980.
- [Ike79] Kensuke Ikeda. Multiple-valued stationary state and its instability of the transmitted light by a ring cavity system. *Optics Communications*, 30(2):257 – 261, 1979.
- [Irw01] Michael Charles Irwin. *Smooth dynamical systems*. Advanced series in nonlinear dynamics 17. World Scientific, 2001.

- [Jac89] E. Atlee Jackson. *Perspectives of nonlinear dynamics. Vol. 1*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [JPJ82] Welington de Melo (auth.) Jacob Palis Jr. *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*. Springer-Verlag New York, 1 edition, 1982.
- [Lim04] Elon Lages Lima. *Análise no Espaço R^n* . IMPA, 2004.
- [Lor63] Edward N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. 20:130–141, 1963.
- [Nee18] Sean Nee. Survival and weak chaos. *Royal Society Open Science*, 5, 05 2018.
- [Nit71] Zbigniew Nitecki. *Differentiable dynamics. An introduction to the orbit structure of diffeomorphisms*. The M.I.T. Press, Cambridge, Mass.-London, 1971.
- [NJD58] Jacob T. Schwartz Nelson James Dunford. *Linear operators*, volume Part 1. John Wiley & Sons Inc, 1st edition edition, 1958.
- [Pal68] J. Palis. On the local structure of hyperbolic points in Banach spaces. *An. Acad. Brasil. Ci.*, 40:263–266, 1968.
- [Sel85] George R. Sell. Smooth linearization near a fixed point. *Amer. J. Math.*, 107(5):1035–1091, 1985.
- [Sot79] Jorge Sotomayor. *Lições de equações diferenciais ordinárias*, volume 11 of *Projeto Euclides [Euclid Project]*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
- [Spa86] C. Sparrow. The Lorenz equations. In *Chaos, Nonlinear Sci. Theory Appl.*, pages 111–134. Manchester Univ. Press, Manchester, 1986.
- [Ste57] Shlomo Sternberg. Local contractions and a theorem of Poincaré. *Amer. J. Math.*, 79:809–824, 1957.
- [Ste58] Shlomo Sternberg. On the structure of local homeomorphisms of euclidean n -space. II. *Amer. J. Math.*, 80:623–631, 1958.
- [Ste59] Shlomo Sternberg. The structure of local homeomorphisms. III. *Amer. J. Math.*, 81:578–604, 1959.
- [Tes12] Gerald Teschl. *Ordinary differential equations and dynamical systems*. AMS Graduate studies in mathematics 140. American Mathematical Society, 2012.